Sur une généralisation de la notion de système dynamique de rang un définie par une propriété de pistage (On a weak version of the rank one property defined by shadowing)

Jerome Buzzi

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE SYSTÈME DYNAMIQUE DE RANG UN DÉFINIE PAR UNE PROPRIÉTÉ DE PISTAGE*

(ON A WEAK VERSION OF THE RANK ONE PROPERTY DEFINED BY SHADOWING)

JÉRÔME BUZZI

Abstract. We investigate a shadowing property which appears naturally in the study of piecewise monotonic maps of the interval. It turns out to be a weak form of the rank one property, a well-known notion in abstract ergodic theory. We show that this new property is implied by finite or even local rank, but that it is logically independent of loose Bernoulliness. We give (counter)examples, including L.B. systems with arbitrarily high-order polynomial complexity. The shadowing property defines a small subset of all zero-entropy systems, in the sense that it defines a closed set with empty interior with respect to the $\bar{d}$-metric, induced by the Hamming distance.

We also make some remarks on the link between the shadowed system and the sequence assumed by the shadowing property.

Résumé. Nous étudions une propriété de pistage qui apparaît naturellement dans l'étude des applications monotones par morceaux sur l'intervalle. Cette propriété s'avère être un affaiblissement de la notion de rang un, notion bien connue en théorie ergodique abstraite. Nous montrons que cette nouvelle propriété est impliquée par le rang fini ou même local, mais qu'elle est logiquement indépendante de la lâche Bernoullicité. Nous donnons des (contre)exemples, en particulier un système L.B. ayant une complexité d'ordre polynômial arbitrairement élevé. La propriété de pistage définit une petite partie de tous les systèmes d'entropie nulle en ce qu'il s'agit d'un fermé d'intérieur vide au sens de la métrique $\bar{d}$, induite par la distance de Hamming.

Nous faisons également quelques remarques sur le lien entre le système dynamique pisté et la suite pistante.

* Travail en partie effectué au Laboratoire de Topologie de Dijon, UMR 5584.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58F11,28D20.

Key words and phrases. pistage; rang un; rang local; lâche Bernoullicité; entropie nulle; complexité mesurée.

1. Introduction

Cet article est consacré à l'analyse abstraite de la propriété de pistage d'un système dynamique probabiliste par une petite partie de l'espace sous-jacent (cf. les définitions ci-dessous). Cette propriété apparaît naturellement dans l'étude de certains systèmes dynamiques géométriques avec singularités: elle distingue les mesures invariantes "dégénérées", c'est-à-dire dont les points génériques se rapprochent trop vite de ces singularités. Il est donc important de comprendre quelles contraintes cette propriété impose à ces mesures dégénérées, voire à leur existence.

On se concentre ici sur le cas des systèmes 1-pistés c'est-à-dire pistés par une partie réduite à un point. Ce cas correspond géométriquement aux mesures dégénérées des applications monotones par morceaux sur l'intervalle. On montre que les systèmes 1-pistés forment une nouvelle classe de systèmes dynamiques d'entropie nulle. Cette classe généralise les systèmes de rang fini ou local. On donne une caractérisation des systèmes 1-pistés calquée sur celle des systèmes de rang un ou fini.

Une partie importante de nos efforts est consacrée à la construction d'exemples qui montrent en particulier que le 1-pistage est indépendant de la propriété "lâchement Bernoulli". Enfin on envisage les liens entre l'orbite du point pistant et le système pisté.

1.1. Définition du pistage.

On part de la propriété symbolique suivante. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini et Σ une partie quelconque de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Une suite $A \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est dite **Σ-pistée** s'il existe des entiers n_i, m_i tendant vers l'infini et une suite d'éléments $s^{(i)} \in \Sigma$ tels que:

$$A_{-n_i} \dots A_{+m_i} = s_0^{(i)} \dots s_{n_i+m_i}^{(i)}.$$

Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique probabiliste, c'est-à-dire un automorphisme d'un espace de Lebesgue. Soit P une partition de X (supposée finie et mesurable comme toutes les partitions de cet article) et Σ une partie quelconque de $P^{\mathbb{N}}$. Pour $F \subset \mathbb{Z}$, on définit le P, F-nom de x, $P^F(x)$, comme l'application A de F dans P définie par $f^k(x) \in A_k$ pour $k \in F$.

(1.1) Définition. *On dira que (T, μ) est (P, Σ)*-**pisté** *si P est une partition génératrice et si, pour μ-presque tout $x \in X$, le P-nom de x, $P^{\mathbb{Z}}(x)$, est Σ-pisté.*

On dira que (T, μ) est 1-**pisté** *(ou simplement,* **pisté***) s'il est (P, Σ)-pisté pour une certaine partition P et une partie Σ réduite à un élément $\omega \in P^{\mathbb{N}}$. On dit que P et ω sont, respectivement, une partition et une suite* **pistantes**.

(1.2) *Remarque.* Les propriétés: pisté par Σ fini et pisté par Σ réduit à un élément sont clairement équivalentes pour les systèmes ergodiques. □

L'intérêt de cette notion est tout d'abord qu'elle **apparaît naturellement** dans certains sysèmes géométriques. Donnons un exemple particulièrement simple:

(1.3) *Exemple.* Un échange d'intervalles $([0, 1], T)$ muni d'une mesure invariante et ergodique est 1-pisté. □

C'est un cas particulier du fait que les mesures "dégénérées au sens de Hofbauer" d'une application monotone par morceaux de l'intervalle sont exactement les mesures pistées par les itinéraires à droite et à gauche des points critiques (i.e., les "kneading invariants"). Par mesure dégénérée, on entend ici une mesure portée par la "partie non-markovienne" de l'extension naturelle de la dynamique symbolique (cf. [11], [13]). Cette situation s'étend aux généralisations de la construction de F. Hofbauer ([1, chap. 6], [2, pp. 145–149], [3]).

Le pistage joue également un rôle dans la construction des variétés stables ou instables des systèmes avec singularités. Expliciter ce rôle est parfois fructueux [4].

Preuve directe. On traite le cas topologiquement minimal, le cas général s'en déduisant facilement. On va montrer que le P-nom de tout point est Σ-pisté avec P la partition naturelle en intervalles et Σ les itinéraires à droite et à gauche des discontinuités. Notons D l'ensemble de ces discontinuités. Soit $x \in [0,1]$. On laisse au lecteur le cas exceptionnel où x est sur l'orbite d'une discontinuité.

Par minimalité, $\liminf_{n\to\infty} d(T^{-n}x, D) = 0$. Il existe donc $n_1 < n_2 < \dots$ tels que $d(T^{-n_i}x, D) < d(T^{-n}x, D)$ pour $0 \leq n < n_i$. Soit $d_i \in D$ réalisant la distance précédente. Posons $\pm = +$ si $d_i < x$, $\pm = -$ sinon. T étant une isométrie sur chacun de ses intervalles, l'inégalité stricte précédente implique que pour $0 \leq k \leq n_i$, $T^{-n_i+k}x$ et $T^k d_i \pm$ ne sont pas séparés par une discontinuité: ils sont donc dans le même élément de P. C'est précisément le pistage annoncé. $\square$

(1.4) *Remarque.* On verra (1.9) qu'une translation irrationnelle sur $\mathbb{T}^d$ muni de la mesure de Lebesgue est également 1-pistée mais que, pour $d \geq 2$, l'équivalent de la partition naturelle n'est pas, dans certains cas, admissible pour le pistage. $\square$

Une autre motivation à cette définition c'est qu'il s'agit d'une **généralisation naturelle** de la notion de rang un. D'après le théorème C ci-dessous, on a en effet la:

Caractérisation. (T, μ) *est* 1*-pisté si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$ *et toute partition* Q *il existe une tour irrégulière* ϵ*-raffinant* Q*, i.e., un ensemble mesurable* B *tel que si* $h : B \to \mathbb{N}^*$ *est le temps de retour dans* B*, alors, pour tout* $A \in Q$*, il existe une union* A' *d'ensembles de la forme:* $T^k\{x \in B : h(x) > k\}$*, avec la propriété:* $\sum_{A\in P} \mu(A \,\Delta\, A') < \epsilon$*.*

Remarquons que cette caractérisation ne fait intervenir ni partition ni suite pistantes.

(1.5) *Remarque.* On peut donner une définition *métrique* du pistage. Dans le cas du 1-pistage, l'équivalence des deux notions se déduit du théorème C ci-dessous. $\square$

1.2. **Résultats.**

Rappelons tout d'abord le fait suivant:

(1.6) Théorème ([1, (6.4)] **ou** [2, Theorem 6.1]**).** *Si* (T, μ) *est* (P, Σ)*-pisté alors:*

$$h(T, \mu) \leq h_{\mathrm{top}}(\Sigma, \sigma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\{s_0 \dots s_{n-1} : s \in \Sigma\}.$$

Dans le cas 1-pisté, l'entropie topologique $h_{\mathrm{top}}(\Sigma, \sigma)$ est bien évidemment **nulle** (et ceci même si l'orbite pistante est dense): la classe des systèmes 1-pistés est donc une partie de l'ensemble des systèmes d'entropie nulle.

Evidemment, dire qu'une partie est réduite à un point est bien plus fort que de dire que son entropie est nulle. On peut donc espérer que le 1-pistage soit une notion bien plus forte que l'entropie nulle: c'est la motivation de ce travail.

Position de la classe des systèmes 1-pistés. Notre résultat principal situe les systèmes 1-pistés par rapport à des classes de systèmes d'entropie nulle bien connues en théorie ergodique abstraite (cf. [6,8,12,14]):

(1.7) Théorème A. *L'ensemble des systèmes* 1*-pistés est une partie de l'ensemble des systèmes d'entropie nulle. Au sens de la distance de Hamming (section 3.3), c'est une partie fermée d'intérieur vide.*

On a les inclusions suivantes (chaque propriété désignant l'ensemble des systèmes dynamiques probabilistes ergodiques la vérifiant):

$$\text{rang local} \subsetneq 1\text{-pistage} \subsetneq \text{entropie nulle}$$
$$1\text{-pistage} \not\subset \text{lâchement Bernoulli et lâchement Bernoulli} \not\subset 1\text{-pistage}.$$

(on sait que: rang un $\subsetneq$ rang fini $\subsetneq$ rang local).

On en déduit que les rotations sur les groupes compacts, les échanges d'intervalles ou encore les substitutions sont 1-pistés (ce sont des systèmes de rang un ou fini [8]).

Problème: Trouver un exemple naturel de système d'entropie nulle qui ne soit pas 1-pisté.

Problème: Trouver une classe naturelle de systèmes dynamiques géométriques qui soient 1-pistés mais dont certains ne soient pas de rang local.

(que peut-on dire des échanges isométriques de polygones [10] ?)

Problème: Trouver des propriétés ergodiques impliquées par le 1-pistage (en dehors de l'entropie nulle) et notamment:

—le 1-pistage implique-t-il, comme le rang local, que la multiplicité spectrale est finie?

—implique-t-il une certaine vitesse de récurrence en analogie avec les résultats de D. Ornstein et B. Weiss [15] qui disent que, pour μ-presque tout x:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \min\{j \geq n : P^{[j,j+n[}(x) = P^{[0,n[}(x)\} = h_\mu(T,P).$$

L'existence de systèmes d'entropie nulle non 1-pistés, ayant de plus la propriété L.B. (dont la définition est rappelée au début de la section 4) se déduit du résultat suivant:

Théorème (5.1). *Pour tout* $\Gamma < \infty$*, il existe* $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ *un automorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue qui est d'entropie nulle, lâchement Bernoulli et qui admet une partition génératrice* P *telle que, pour* $\epsilon > 0$ *assez petit, pour tout* n *assez grand, la mesure de toute boule-*$\bar{d}$ *(définie au début de la section 5) de rayon* ϵ *correspondant à un mot de longueur* n *est majorée par* $n^{-\Gamma}$*.*

Lien entre suite pistante et système pisté. Presque toute orbite étant formée de copies exactes de débuts arbitrairement longs de la suite pistante on pourrait penser que ce lien est très fort. Nous présentons quelques observations qui montrent qu'en général il n'en est rien.

Rappelons qu'un point ω de l'espace topologique $P^{\mathbb{N}}$ est **quasi-générique** pour une mesure μ, si la suite $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\sigma^k \omega}$ admet μ comme valeur d'adhérence pour la topologie vague. S'il y a convergence vers μ, alors ω est dit **générique**.

(1.8) Théorème B. *Soit* $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ *un système dynamique probabiliste ergodique.*

(1) Si $\omega \in P^{\mathbb{N}}$ *piste* (T, μ) *par rapport à une certaine partition* P *alors* ω *est quasi-générique, mais non-nécessairement générique, pour* $P^{\mathbb{Z}}\mu$.

(2) Il y a abondance de suites pistantes:
Au sens de la **topologie,** *presque toute suite piste au moins un système dynamique. Plus précisément, si* P *est une partition de* X, *alors l'ensemble des* $\omega \in P^{\mathbb{N}}$ *tels que* (T, μ) *soit* (P, ω)*-pisté pour au moins une mesure* μ *est un* G_δ*-dense de* $P^{\mathbb{N}}$.
Au sens de la **mesure,** *si* T *est de rang local et si* P *est une partition par rapport à laquelle* T *soit pistée par une certaine suite alors le* P*-nom,* $P^{\mathbb{Z}}(x)$*, de* μ*-presque tout* $x \in X$, P*-piste* T.

(3) Une même suite peut pister des systèmes complètement différents:
Etant donnés deux systèmes 1*-pistés, ergodiques et apériodiques (i.e., dont les points périodiques forment un ensemble de mesure nulle), on peut trouver une partition génératrice à deux éléments pour chacun des systèmes, telles que chaque système est pisté, par rapport à la partition choisie, par une même suite* ω *(si on identifie les deux partitions).*

La dernière partie du théorème suggère la:
Question: Existe-t-il une suite **universellement pistante** $\Omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire telle que tout systéme ergodique et apériodique admette une partition génératrice $\{A_0, A_1\}$ par rapport à laquelle ce système soit pisté par la suite $A_{\Omega_0} A_{\Omega_1} \dots$?

On peut interpréter cette dernière partie du théorème comme indiquant, qu'**en général**, la connaissance d'une suite pistante **n'apprend rien** sur le système 1-pisté. Ceci suggère donc de regarder des suites pistantes particulières. On pose donc le:

Problème: Formuler et prouver des théorèmes du type: une propriété "combinatoire" de la suite pistante implique l'existence ou l'unicité ou une propriété ergodique pour le système pisté.
On aimerait tout particulièrement:

(1) des conditions sur la suite qui puissent être vérifiées dans les cas géométriques, notamment pour les itinéraires des points critiques des applications monotones par morceaux.
(2) identifier "combinatoirement" les sous-classes rang un, rang fini, rang local parmi les systèmes pistés.

1.3. **Choix de la partition.** Toute partition n'est pas pistante. Donnons un exemple simple.

(1.9) *Exemple.* Une rotation irrationnelle sur le cercle est un échange d'intervalles minimal: d'après l'exemple (1.3), ce système est pisté par rapport à sa partition naturelle. C'est faux en dimension supérieure: une translation irrationnelle sur $\mathbb{T}^2$, qu'on peut voir comme un produit de deux rotations irrationnelles admet une partition naturelle P telle que les atomes des itérés sont de mesure (de Lebesgue) en $1/n^2$ si les angles sont à quotients partiels bornés. Or $\sum 1/n^2 < \infty$: on voit alors facilement (cf. par exemple (3.1)) que le système ne peut être pisté par rapport à sa partition naturelle! $\square$

1.4. **Plan de l'article.** Tout d'abord, la section 2 donne des définitions alternatives du 1-pistage calquées sur les caractérisations classiques du rang 1. La section 3 en tire quelques conséquences qui prouvent, d'une part, les deux premiers points du théorème A, d'autre part, le théorème B.

Le reste de l'article donne deux exemples achevant la preuve du théorème A. La section 4 décrit un système 1-pisté qui n'est pas L.B. Sa construction est inspirée d'un exemple de système d'entropie zéro non-L.B. dû à J. Feldman. Ici toutefois il y a un type de bloc prédominant (affecté d'une probabilité $1/n$ au rang n) qui force le 1-pistage mais rend plus délicate la preuve du caractère non-L.B. La section 5 décrit inversement un système L.B., d'entropie nulle qui n'est pas 1-pisté. Pour ce faire, on construit des systèmes L.B. dont la complexité mesurée est d'ordre polynomial arbitrairement élevé, en codant le type de chaque bloc par de petits décalages (importants pour la métrique $\bar{d}$, négligeables pour $\bar{f}$, d'où le résultat).

1.5. **Remerciements.** Je dois à Philippe Thieullen l'idée d'un lien possible entre 1-pistage et rang un.

Je remercie Jean-Paul Thouvenot pour de nombreuses discussions auxquelles ce travail doit beaucoup.

2. Le pistage comme rang 1 irrégulier

Pour préciser la relation entre le 1-pistage et la notion de rang un et ses généralisations nous montrons qu'on peut caractériser le 1-pistage d'une façon similaire au rang un. Ce faisant nous obtiendront une certaine souplesse vis-à-vis de la suite pistante, souplesse qui nous servira par la suite.

Nous avons besoin de quelques définitions.

(2.1) Définition. *Une* **tour irrégulière** τ *est définie par la donnée d'une fonction mesurable et bornée, sa* **hauteur**, $h_\tau : X \to \mathbb{N}$ *telle que les ensembles suivants, appelés* **niveaux**, *soient deux-à-deux disjoints:*

$$N_\tau(k) = T^k\{x \in X : h_\tau(x) > k\} \qquad k = 0, 1, \ldots, \max h_\tau - 1.$$

L'union des niveaux d'une tour est appelé son **support** *et noté simplement* τ. *Le* **toît** *est l'ensemble* $\bigcup_{k\geq 1} T^{k-1}(h_\tau^{-1}(k))$, *i.e., l'ensemble des* $x \in \tau$ *qui "sortent" de la tour. La* **partition associée**, *notée* P_τ, *est la partition engendrée par les niveaux de* τ, *i.e., les* $N_\tau(k)$ *pour* $0 \leq k < \max h_\tau$.

Etant donnée une partition P, *une tour est dite* P**-pure** *si chacun de ses niveaux est inclus dans un élément de* P.

(2.2) *Remarque.* 1. La condition de disjonction ci-dessus est équivalente au fait que la fonction hauteur est majorée par le temps de retour à la base $\{x : h_\tau(x) > 0\}$.

2. Si la fonction hauteur ne prend qu'une seule valeur non-nulle H, on obtient simplement une **tour de Rokhlin** de hauteur H et de base $h_\tau^{-1}(H)$. $\square$

(2.3) Définition. *Une tour irrégulière* τ' *est dite* **emboîtée** *dans une tour de Rokhlin de base* B *et de hauteur* H *s'il existe des entiers* $l_1 < \cdots < l_r$ *tels que:*

$$T^k B = \bigcup_{i=1}^{r} N_{\tau'}(l_i + k) \qquad \forall 0 \leq k < H. \tag{2.4}$$

τ et τ' étant deux tours irrégulières, on dit que τ' est **emboîtée** *dans τ si τ' s'emboîte dans chaque* **sous-tour de Rokhlin** *de τ. Les* **sous-tours de Rokhlin** *de τ sont les tours de base $h_\tau^{-1}(k)$ et de hauteur k, k parcourant les hauteurs de τ.*

(2.4) est équivalent à: $B = \bigcup_{i=1}^{r} N_{\tau'}(l_i)$ et $]l_i, l_i{+}H[$ ne contient pas de **hauteurs** de τ', i.e., d'entiers $k > 0$ tels que $h_{\tau'}^{-1}(k) \neq \emptyset$.

On peut également formuler l'emboîtement de τ' dans τ en disant que P'_τ est plus fine que P_τ et que $\tau' \setminus \text{toît}(\tau')$ contient $\tau \setminus \text{toît}(\tau)$; ou encore que l'ordre partiel naturellement associé à τ' prolonge celui correspondant à τ.

On note enfin $\bar{d}(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\#\{k = 0, \ldots, n-1 : a_k \neq b_k\}$ la distance de Hamming entre deux suites finies de même longueur $n = |a| = |b|$.

On peut maintenant énoncer le:

(2.5) Théorème C. *Le 1-pistage d'un système $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ ergodique est caractérisé par n'importe laquelle des propriétés suivantes:*

(C1) pour toute partition P, il existe une suite $\omega \in P^{\mathbb{N}}$ telle que, pour μ-presque tout $x \in X$, il existe des entiers positifs n_i et m_i avec $n_i + m_i$ tendant vers l'infini tels que:

$$\lim_{i\to\infty} \bar{d}(P^{[-n_i,m_i]}(x), \omega_0 \ldots \omega_{n_i+m_i}) = 0.$$

(C2) pour toute partition P et tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $\omega \in P^N$ ($N \in \mathbb{N}$), telle que, pour μ-presque tout $x \in X$, pour tout n assez grand, la suite finie $P^{[0,n[}(x)$ peut s'écrire comme la concaténation:

$$\alpha^{(1)}\omega^{(1)}\alpha^{(2)}\omega^{(2)}\ldots\alpha^{(r+1)}$$

où les $\alpha^{(i)}$ sont des suites quelconques dont la somme des longueurs est au plus ϵn et chaque $\omega^{(i)}$ vérifie $l = |\omega^{(i)}| \in [\epsilon^{-1}, N]$ et $\bar{d}(\omega^{(i)}, \omega_0 \ldots \omega_{l-1}) < \epsilon$. On dit qu'on a un $(1-\epsilon)$**-recouvrement** *de $P^{[0,n[}(x)$ par des* $\bar{d}$**-**ϵ**-copies** *de débuts de ω.*

(C1') et (C2'): la même chose que (C1) et (C2), mais pour une partition génératrice particulière.

(C3) pour toute partition Q et tout $\epsilon > 0$, il existe une tour irrégulière τ dont la partition associée P_τ ϵ**-raffine** *Q, c'est-à-dire qu'à chaque élément $A \in Q$, on peut associer A' une union d'éléments de P_τ de sorte que: $\sum_{A\in Q} \mu(A \,\Delta\, A') < \epsilon$.*

(C4) il existe une suite de tours irrégulières toutes pures par rapport à une partition génératrice fixée, deux-à-deux emboîtées et dont les partitions associées engendrent ensemble la tribu des mesurables modulo μ.

(2.6) *Remarque.* Si on substitue, dans les caractérisations du théorème ci-dessus, des tours de Rokhlin aux tours irrégulières, des mots de longueur fixée $l = |\omega|$ aux segments initiaux de longueur variable, **on retrouve les caractérisations classiques des systèmes de rang un** [12]. On voit dès à présent que le rang un implique le 1-pistage (cf. section 3.1). □

Preuve du théorème C. Il s'agit de prouver que les caractérisations proposées par le théorème C sont effectivement équivalentes au 1-pistage. On va procéder dans l'ordre suivant:

$$\text{1-pistage} \implies \text{(C1)} \implies \text{(C2)} \implies \text{(C3)} \implies \text{(C4)} \implies \text{1-pistage}.$$

Les équivalences de (C1) $\iff$ (C1') et (C2) $\iff$ (C2') seront envisagées séparément.

Les démonstrations s'inspirent, pour une large part, des démonstrations "classiques" faites dans le cas du rang un (voir notamment [12]).

Remarquons que si T n'est pas apériodique, alors, par ergodicité, X est réduit à une orbite périodique et le théorème est trivial. On suppose donc l'apériodicité.

(2.7) *Remarque.* Dans la chaîne d'implications 1-pistage $\Longrightarrow$ (C1) $\Longrightarrow$ ... $\Longrightarrow$ (C4), si P est une partition par rapport à laquelle le système est pisté, alors:

(1) dans (C1) et (C2), il n'y a pas d'erreur $\bar{d}$.
(2) dans (C3) et (C4), les tours obtenues peuvent être supposées P-pures.

Cette remarque servira à la preuve de l'abondance en mesure des suites pistantes (section 3.2).

1-pistage $\Longrightarrow$ (C1). Supposons donc $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ (Q, ω)-pisté avec Q une partition génératrice. Fixons P une partition quelconque. Q étant génératrice, il existe, pour chaque $\epsilon > 0$, un entier $N = N(\epsilon)$ tel que P est ϵ-raffiné par $\bigvee_{k=0}^{N-1} T^{-k}Q$ (un générateur est automatiquement un générateur unilatéral, T étant d'entropie nulle). Autrement dit, on a une application $q_\epsilon : Q^N \to P$ telle que $p_\epsilon(Q^{[0,N[}(x)) = P(x)$ pour tout $x \in X \setminus X_\epsilon$ avec $\mu(X_\epsilon) < \epsilon$.

Posons $\epsilon_k = 2^{-k}$, $N_k = N(\epsilon_k)$ et $X_k = X_{\epsilon_k}$. On définit $\tilde{\omega} \in P^{\mathbb{N}}$ par:

$$\tilde{\omega}_n \stackrel{\text{def}}{=} p_{\epsilon_k}(\omega_n \dots \omega_{n+N_k-1}) \qquad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

où $k = k(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{l : N_l \leq \log(n+1) + N_0\}$ (de sorte que $k(n) \nearrow \infty$ mais $N_{k(n)}/n \to 0$). On a: $\mu(\bigcup_{l \geq k} X_l) < 2^{-k+1}$.

Soit $\epsilon > 0$. Fixons $K < \infty$ tel que $2^{-K} < \epsilon/10$. D'après le théorème ergodique appliqué à T^{-1}, pour μ-presque tout $x \in X$, si n est suffisamment grand:

$$\frac{1}{n}\#\{p \in [-n, 0] : T^p(x) \in \bigcup_{k \geq K} X_k\} < 2^{-K+1} < \frac{2}{10}\epsilon. \tag{2.8}$$

Fixons n comme dans la définition du pistage: $Q^{[-n,0]}(x) = \omega_0 \dots \omega_n$. Posons $D = \frac{\epsilon}{10}n$. On peut supposer n assez grand pour avoir l'inégalité (2.8) ainsi que $k(D) \geq K$ et $(\log(n+1) + N_0)/n < \epsilon/10$. En particulier, $N_{k(n)} \leq D$.

Soit $p \in [-n+D, -D]$ tel que $T^p(x) \notin \bigcup_{k \geq K} X_k$. Ces p représentent une fraction de $[-n, 0]$ au moins égale à $1 - 4\epsilon/10$.

Comme $k = k(p+n) \leq k(n)$, $N_k \leq N_{k(n)} \leq D$ donc $p + N_k \leq 0$. En particulier, $\omega_{p+n} \dots \omega_{p+n+N_k-1} = Q^{N_k}(T^p x)$. Comme $k = k(p+n) \geq k(D) \geq K$ et $T^p x \notin \bigcup_{l \geq K} X_l$,

$$\tilde{\omega}_{p+n} \stackrel{\text{def}}{=} p_{\epsilon_k}(\omega_{p+n} \dots \omega_{p+n+N_k-1}) = p_{\epsilon_k}(Q^{N_k}(T^p x)) = P(T^p x).$$

On en déduit:

$$\bar{d}(P^{[-n,0]}(x), \tilde{\omega}_0 \dots \tilde{\omega}_n) < \frac{4}{10}\epsilon \leq \epsilon.$$

La propriété (C1) est maintenant immédiate.

(C1) $\Longleftrightarrow$ (C1'). L'implication (C1) $\Longrightarrow$ (C1') est triviale. L'implication réciproque se déduit de la preuve ci-dessus.

(C1) $\Longrightarrow$ (C2). Il suffit d'appliquer le résultat technique suivant, dû à D. Rudolph:

(2.9) Théorème (D. Rudolph [18, Theorem 3.6]**).** *("Backward Vitali Lemma") Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un automorphisme apériodique d'un espace de Lebesgue.*

Supposons que pour presque tout x, on a défini des entiers positifs i_k et j_k dont la somme tend vers l'infini. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $Y \subset X$ et $k : Y \to \mathbb{N}$ tels que, si on pose $I(y) = \{T^n y : -i_k \leq n \leq j_k\}$ alors:

(1) *Si $y, y' \in Y$ et $y \neq y'$ alors $I(y) \cap I(y') = \emptyset$.*
(2) *$\bigcup_{y \in Y} I(y)$ est de mesure au moins $1 - \epsilon$.*

On applique le théorème avec $i_k(x) = n_k(x)$ et $j_k(x) = m_k(x)$ fournis par (C1). Quitte à réduire un peu Y, on peut supposer que $i_k + j_k$ est bornée. On applique ensuite le théorème ergodique pour obtenir (C2).

(C2) $\Longleftrightarrow$ (C2'). L'implication (C2) $\Longrightarrow$ (C2') est triviale. L'implication réciproque se déduit de la preuve de 1-pistage $\Longrightarrow$ (C1) donnée ci-dessus.

(C2) $\Longrightarrow$ (C3). Il suffit de reproduire la preuve correspondante dans le cas du rang un [12]. Rappelons l'idée. Soit $\epsilon > 0$ et Q une partition.

T étant apériodique, il existe une tour de Rokhlin de mesure presque 1 et de grande hauteur H. On subdivise sa base B suivant Q, i.e., on considère les tours de Rokhlin de même hauteur H et de base $B \cap q$ pour chaque $q \in \bigvee_{k=0}^{H-1} T^{-k} Q$ tel que l'intersection soit de mesure non-nulle.

Ces sous-tours de Rokhlin sont Q-pures par construction. Elles portent donc chacune un Q-nom bien défini. En appliquant (C2), après élimination des sous-tours atypiques, on voit que ce Q-nom est essentiellement une juxtaposition de (longues) $\bar{d}$-copies de débuts $P^{[m,n]}(B \cap q)$ d'une même suite ω. Ces intervalles $[n, m]$ définissent des tours de Rokhlin (de base $T^m(B \cap q)$ et de hauteur $n - m$). Celles-ci peuvent être juxtaposées en une tour irrégulière essentiellement Q-pure qui satisfait à la condition (C3). $\square$

(C3) $\Longrightarrow$ (C4). C'est l'étape la plus importante (et la plus délicate). Notre démonstration est un raffinement de la preuve donnée dans le cas du rang un [12].

On suppose que $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ vérifie (C3). Soit $Q_1, Q_2, \ldots$ une suite de partitions de plus en plus fines dont l'union engendre la tribu des mesurables (ce qu'on notera: $Q_n \nearrow \mathcal{B}$).

Etape 1. *Construction d'une suite de tours emboîtées $\tau_1, \tau_2, \ldots$ telles que $P_n \stackrel{\text{def}}{=} P_{\tau_n}$ ϵ_n-raffine Q_n avec $\epsilon_n \searrow 0$.*

(on convient d'abréger $P_{\tau_n}, h_{\tau'_n}, \ldots$ en $P_n, h'_n, \ldots$).

Il suffira d'appliquer le lemme suivant avec, à la $n$ième étape, $\delta = \delta_n$ un terme de série sommable:

(2.10) Lemme. *Soit $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ une suite de $n \geq 0$ tours telles que P_k ϵ_k-raffine Q_k avec $\epsilon_k > 0$, pour $k = 1, \ldots, n$. Soit $\delta > 0$.*

Il existe alors une suite de $n+1$ tours emboîtées $\tau'_1, \dots, \tau'_{n+1}$ telles que P'_{n+1} δ-raffine Q_{n+1} et:

$$d(P'_k, P_k) \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_i \mu(N'_k(i) \,\Delta\, N_k(i)) < \delta \qquad \textit{pour tout } 1 \le k \le n.$$

En particulier, P'_k $(\epsilon_k + \delta)$-raffine Q_k.

En effet, le lemme fournit une suite de suites de tours irrégulières $\tau_k^{(n)}$, $1 \le k \le n$, $n = 1, 2, \dots$ emboîtées et telles que, pour k fixé, $\tau_k^{(n)}$ converge quand $n \to \infty$ dans un sens évident vers une tour τ_k. La suite limite est bien évidemment emboîtée et P_k $\sum_{l \ge k} \delta_l$-raffine Q_k. La preuve du lemme achèvera donc l'étape 1.

Prouvons le lemme. L'idée est la suivante: on prend une tour irrégulière τ'_{n+1} dont la partition soit si fine que la base de τ_n est essentiellement une union de niveaux de τ'_{n+1}, i.e., τ_n et τ'_{n+1} sont déjà presque emboîtées: il suffira d'une correction très petite de τ_n en τ'_n pour obtenir un emboîtement exact. Enfin, pour maintenir les emboîtements des $\tau_1, \dots, \tau_n$ il suffira de définir τ'_k en fonction de τ'_{k+1} avec la même formule que τ_k en fonction de τ_{k+1}.

Voyons les détails. Soit $H = \max h_n$ et $H_1 = 8\delta^{-1}H^2$.

(2.11) Affirmation. *On peut trouver une tour τ'_{n+1} dont la partition associée, P'_{n+1}, $\delta/8H$-raffine la partition $\Pi = \{h_n^{-1}(j) : j = 0, \dots, H-1\} \vee Q_{n+1}$ et telle que:*

$$\Delta'_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{1 \le s \le S'_{n+1}} k'^{n+1}_s - k'^{n+1}_{s-1} \ge H_1$$

où $k'^n_1 < \dots < k'^n_{S'_{n+1}}$ sont les hauteurs de τ'_{n+1} (on convient que $k'^{n+1}_0 = 0$).

Preuve de l'affirmation. Posons $H_2 = 48\delta^{-1}H \cdot H_1$ et $\gamma = \delta/48HH_2^2$. Soit R une partition dont les éléments sont de mesure au plus $\gamma/2$. D'après (C3), il existe une tour τ' dont la partition associée $\gamma/2$-raffine $\Pi \vee R$.

La mesure de chaque niveau de τ' est au plus égale à γ. On peut donc supprimer les sous-tours de hauteur inférieure à H_2: il y en a au plus H_2 de mesure chacune au plus $H_2 \cdot \gamma$. Ce faisant, on supprime une mesure au plus égale à $(H_2)^2\gamma = \delta/48H$.

Pour avoir la minoration sur Δ'_{n+1}, il suffit maintenant de remplacer h' par $H_1[h'/H_1]$ où $[\cdot]$ représente la partie entière. Ce faisant on supprime une mesure au plus égale à $H_1/\min\{h'(x) > 0 : x \in X\} \le H_1/H_2 = \delta/48H$. Soit τ'_{n+1} la tour résultant de ces suppressions.

La partition associée à τ' $\gamma/2$-raffine Π avec $\gamma/2 \le \delta/24H$. La partition associée à τ'_{n+1} raffine donc Π à la précision: $\delta/24H + 2\mu(\text{enlevé}) = \delta/8H$.

L'affirmation est démontrée. $\square$

Preuve du lemme. Soit donc τ'_{n+1} comme dans l'affirmation. Modifions τ_n en τ'_n emboîtée dans τ'_{n+1}. Pour cela on définit τ'_n de sorte que:

(i) pour chaque $j = 1, \dots, \max h_n$, $h'^{-1}_n(j)$ est une union d'éléments de P'_{n+1}.

(ii) $\sum_j \mu(h'^{-1}_n(j) \,\Delta\, h_n^{-1}(j)) < \delta/8H$.

Pour avoir un emboîtement, on doit supprimer de l'union mentionnée au point (i) définissant $h'^{-1}_n(j)$ d'abord $X \setminus \tau'_{n+1}$ et ensuite les niveaux $N'_{n+1}(l)$ tels que:

$$T^i N'_{n+1}(l) \ne N'_{n+1}(l+i) \text{ pour un } i \in [1, j[,$$

i.e., tels que ${h'}_{n+1}^{-1}([l+1, l+j[) \neq \emptyset$. Ce faisant on accroît la distance (ii) d'au plus $\delta/8H + H/H_1$. La distance (ii) après cette correction est donc majorée par $\delta/2H$.

On en déduit que:

$$d(P'_n, P_n) \leq 2H \sum_j \mu({h'}_n^{-1}(j) \,\Delta\, h_n^{-1}(j)) \leq \delta. \tag{2.12}$$

τ'_n a donc les bonnes propriétés. Il reste à maintenir l'emboîtement de τ_n dans τ_{n-1}, etc. Les tours τ_n et τ_{n-1} étaient déjà emboîtées: la base de chaque sous-tour de Rokhlin de τ_{n-1} était une union de niveaux de τ_n:

$$h_{n-1}^{-1}(j) = \bigcup_{i=1}^{I_j} N_n(l_{ij}) \qquad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, \max h_{n-1}$$

chaque l_{ij} vérifiant: $T^m(N_n(l_{ij})) = N_n(l_{ij} + m)$ pour $m \in [1, j[$, i.e., $h_n^{-1}([l_{ij} + 1, l_{ij} + j[) = \emptyset$.

Pour préserver cet emboîtement, alors qu'on a dû modifier τ_n (mais sans rajouter de nouvelles hauteurs), on garde la formule, en y substituant τ'_n à τ_n. On obtient ainsi τ'_{n-1} avec $d(P'_{n-1}, P_{n-1}) \leq d(P'_n, P_n) \leq \delta$. On répercute ensuite cette nouvelle modification sur τ_{n-2}, etc.

Le lemme est démontré. $\square$

Etape 2. *On peut trouver une partition P génératrice pour laquelle toutes les tours τ_n soient pures (quitte à remplacer les tours τ_n par des tours emboîtées τ'_n avec $d(P'_n, P_n) \to 0$).*

Pour garantir la pureté des tours, on construit chaque élément de P comme une union de certains niveaux pris dans les tours τ_n. Pour que P soit génératrice, il suffit que, pour μ-presque tout x, la connaissance du nom $P^{\mathbb{Z}}(x)$ suffise à déterminer le niveau dans lequel x se trouve par rapport à chaque tour τ_n. En effet ceci détermine $Q_n(x)$, l'élément de Q_n contenant x, pour x en dehors d'un ensemble de mesure au plus ϵ_n: en supposant $\sum_n \epsilon_n < \infty$ et en appliquant Borel-Cantelli, on voit que ceci détermine $Q_n(x)$ pour n assez grand. Mais $Q_n \nearrow \mathcal{B}$.

On souhaite poser $P = \{A, B, C, D\}$ avec:

$$\begin{aligned}
A &= \bigcup_{n \geq 1} N_n(k_1^n - n - 2) \cup N_n(k_1^n - 1) \\
B &= \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{s \geq 2} N_n(k_s^n - n - 2) \cup N_n(k_s^n - 1) \\
C &= \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{s \geq 1} N_n(k_s^n - n - 1) \cup \cdots \cup N_n(k_s^n - 2) \\
D &= X \setminus (A \cup B \cup C)
\end{aligned}$$

où $0 < k_1^n < k_2^n < \cdots < k_{S_n}^n = \max h_n$ sont les hauteurs de τ_n, i.e., les entiers $k > 0$ tels que $h_n^{-1}(k) \neq \emptyset$. Si c'est possible, alors on lit sur le P-nom d'un point les instants où il franchit la base et le toît de chacune des tours τ_n, et donc le niveau de τ_n contenant x (ou si $x \in \tau_n$).

En effet, il suffit de considérer les apparitions des mots AC^nA et BC^nB. Par exemple, l'apparition de $AC^nA\dots BC^nB\dots BC^nB\dots AC^nA$ (les points de suspensions représentant des symboles D ou des mots AC^mA ou BC^mB avec $m\neq n$) signale le passage dans la sous-tour de τ_n de hauteur k_n^3. Plus précisément, si on a:

$$\begin{array}{lccccccccc} P^{\mathbb{Z}}(x): & \dots & AC^nA & \dots & BC^nB & \dots & BC^nB & \dots & AC^nA & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & \end{array}$$

cela correspond à une traversée de la tour τ_n entre les instants $t_1-k_n^1+1$ (niveau 0) et t_3 (toît au niveau k_n^3-1).

Il reste à montrer, qu'après modification des tours, la définition proposée pour P est possible. Il suffit que, pour chaque $n\geq 1$:

(i) $k_1^n-n-2\geq H\stackrel{\text{def}}{=}\max h_{n-1}$.
(ii) $\bigcup_{s=1}^{S_n}\bigcup_{m=1}^{n+2}N_n(k_n^s-m)$ est disjoint des tours de rang $<n$ (pour avoir la disjonction de A,B,C).

La condition (i) est facilement satisfaite (cf. l'étape 1).

Pour satisfaire la condition (ii), il suffit de retirer des tours de rang $<n$ les niveaux en question, ainsi que leurs pré-images par $T,\dots,T^{H-1}$. Vu (i), ces pré-images ne sont autres que les niveaux $N_n(k_n^s-m)$ pour $m\in[1,n+2+H]$.

La mesure à retirer des tours d'ordre $<n$ représente donc une fraction de τ_n (donc une mesure) majorée par $(n+2+H)/\Delta_n$, l'écart minimal entre deux hauteurs de τ_n. Mais $\Delta_n\nearrow\infty$ aussi vite que l'on veut. On peut donc effectuer ces corrections, tout en préservant l'emboîtement en remaniant les tours précédentes comme dans l'étape 1.

Ceci achève l'étape 2 et la preuve de (C3) $\Longrightarrow$ (C4).

(2.13) *Remarque.* 1. On peut se contenter d'une partition P à deux éléments (il suffit de "coder" les nombres de 0 à 3 en base 2).

2. On peut insérer dans les tours irrégulières tous les mots finis sur P que l'on veut, et donc faire apparaître ces mots dans la suite pistante. $\square$

(C4) $\Longrightarrow$ 1-pistage. Supposons que $(X,\mathcal{B},T,\mu)$ vérifie (C4): on a donc une suite de tours $\tau_1,\tau_2,\dots$ qui sont emboîtées, pures pour une certaine partition génératrice P et dont les partitions associées vérifient: $P_n\stackrel{\text{def}}{=}P_{\tau_n}\nearrow\mathcal{B}$.

Soit $\omega^{(n)}$ le P-nom de la tour τ_n. Comme $P_n\nearrow\mathcal{B}$ et que l'espace est non-atomique, la mesure de τ_n tend vers 1 tandis que celle de la base, $N_n(0)$ tend vers zéro. On en déduit qu'il existe des entiers $l_n\to\infty$ tels que:

$$\mu(B_n)\to 1 \qquad \text{avec } B_n\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{s=1}^{S_n}\bigcup_{j=l_n}^{k_n^s-l_n}T^j(h_n^{-1}(k_n^s))$$

En effet, $\mu(\tau_n\setminus B_n)=2l_n\sum_{s=1}^{S_n}\mu(h_n^{-1}(k_n^s))=2l_n\mu(N_n(0))$, or $\mu(N_n(0))\to 0$. Remarquons que $x\in B_n$ implique que $P^{[-r,s]}(x)=\omega^{(n)}$ avec $r,s\geq l_n$.

En passant à une sous-suite, on peut supposer $\sum_{n\geq 1}\mu(X\setminus B_n)<\infty$. μ-presque tout $x\in X$ est donc chaque B_n, dès que n est assez grand: il existe $r,s,n\to\infty$ tels que:

$$P^{[-r,s]}(x)=\omega_0^{(n)}\dots\omega_{r+s}^{(n)}$$

On aura donc la propriété de pistage si on peut faire en sorte que les P-nom des τ_n, $\omega^{(n)}$, soient les débuts d'une même suite $\omega \in P^{\mathbb{N}}$, i.e., qu'ils se prolongent les uns les autres. Vu les hypothèses de pureté, il suffit d'obtenir que les bases des tours τ_n et τ_{n+1} aient une intersection de mesure non-nulle.

Remarquons que, comme dans la preuve de l'implication (C3) $\Longrightarrow$ (C4), on peut faire en sorte que Δ_n, la différence minimale entre deux hauteurs de τ_n, tende vers l'infini.

(2.14) Lemme. *Soit $\tau_1, \tau_2, \ldots$ une suite de tours irrégulières P-pures, emboîtées et telles que $P_n \nearrow \mathcal{B}$ et $\Delta_n \nearrow \infty$.*

Fixons $\delta > 0$. Pour m assez grand, il existe τ'_n et τ'_m telles que:

(1) *τ'_n, τ'_m sont encore P-pures et $N'_m(0) \subset N'_n(0) \subset N_n(0)$.*
(2) *$d(P'_n, P_n) < \delta$, $d(P'_m, P_m) < \delta$.*
(3) *τ'_m s'emboîte dans τ'_n.*

En particulier, (1) implique que ${\omega'}^{(m)}$ prolonge ${\omega'}^{(n)} = \omega^{(n)}$.

On en déduira l'existence d'une suite de tours comme annoncé ((C4)+P-noms se prolongeant les uns les autres) en procédant comme dans la preuve de (C3) $\Longrightarrow$ (C4), après avoir remarqué que la répercution du déplacement de τ_n sur $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ préserve la propriété: $\omega^{(i)}$ prolonge $\omega^{(j)}$ pour $1 \leq j \leq i < n$.

Preuve. On fixe $\delta > 0$. En utilisant l'ergodicité, on voit que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{K} T^{-k} N_n(0)\right) > 1 - \delta/6.$$

pour K grand. Fixons $m > n$ suffisamment grand (on verra à quel point au cours de la démonstration).

L'union $U_m = \bigcup_{s=1}^{S_m} \bigcup_{i=1}^{K/\delta} N_m(k_m^s - i)$ est de mesure au plus $K/\delta\Delta_m$ où Δ_m est la plus petite différence entre deux hauteurs de τ_m. m étant grand, Δ_m l'est aussi et on peut supposer que U_m est de mesure au plus $\delta/6$.

Soit L minimal tel que $N_m(L) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{K} T^{-k} N_n(0) \setminus U_m\right)$ soit de mesure non-nulle. La mesure de l'union des niveaux de τ_m inférieurs à L est majorée par $(2/6)\delta$. Enlevons-les et supposons désormais $L = 0$. La tour restante a une hauteur minimale au moins égale à K/δ, en effet, U_m étant une union de niveaux, on a: $N_m(L) \subset X \setminus U_m$, et donc, par définition de U_m, la hauteur restante est bien d'au moins K/δ.

Soit $k \in [0, K[$ tel que $T^k(N_m(0))$ rencontre $N_n(0)$ sur un ensemble de mesure positive. Remarquons qu'on peut supposer que K est plus petit que la hauteur minimale de τ_m, d'où: $T^k(N_m(0)) = N_m(k)$. Comme τ_m s'emboîte dans τ_n, on a en fait $N_m(k) \subset N_n(0)$.

Supprimons les niveaux en dessous de k. Ce faisant on enlève une fraction de la mesure majorée par K/Δ_m qu'on peut supposer majoré par $\delta/6$. La tour τ'_m ainsi obtenue définit bien une suite finie ${\omega'}^{(m)}$ prolongeant $\omega^{(n)}$. D'autre part, $d(P'_m, P_m) < \delta$.

Comme dans la preuve de (C3) $\Longrightarrow$ (C4), on doit corriger τ_n en τ'_n pour maintenir l'emboîtement. Enfin les bases de τ_n et de τ'_n s'intersectent sur un ensemble de mesure positive: les suites $\omega^{(n)}$ et ${\omega'}^{(n)}$ sont donc bien les mêmes. $\square$

Le 1-pistage est ainsi démontré, achevant la preuve du théorème C. $\square$

3. Conséquences

3.1. Condition nécessaire pour le 1-pistage.

La caractérisation (C1) du théorème C(ou plutôt l'implication 1-pistage $\Longrightarrow$ (C1)) donne aussitôt une condition nécessaire (un peu brutale!) pour le 1-pistage:

(3.1) Corollaire. *Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique 1-pisté. Soit P une partition quelconque. Pour $w = w_0 \dots w_{n-1} \in P^n$, on note $B_{\bar{d}}(w, \epsilon) = \{x \in X : \bar{d}(P^{[0,n[}(x), w) < \epsilon\}$. On a alors, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N < \infty$,*

$$\bigcup_{n \geq N} T^{n-1} B_{\bar{d}}(\omega_0 \dots \omega_{n-1}, \epsilon) = X \mod \mu,$$

pour une certaine suite $\omega \in P^{\mathbb{N}}$. En particulier:

$$\sum_{n \geq 1} \max_{w \in P^n} \mu(B_{\bar{d}}(w, \epsilon)) = \infty \qquad \forall \epsilon > 0.$$

3.2. 1-pistage et rang local.

D'après le théorème C, il est manifeste que rang 1 implique 1-pisté. On a en fait beaucoup plus: la propriété de rang local [6], qui généralise strictement le rang fini, suffit à entraîner le 1-pistage.

Rappelons que le rang local peut être caractérisé [12] par l'existence de tours $\theta_1, \theta_2, \dots$

(i) deux-à-deux emboîtées.
(ii) de hauteurs h_n tendant vers l'infini.
(iii) de mesure minorée par une constante $a > 0$.
(iv) pures par rapport à une partition génératrice fixée.

(3.2) Proposition. *Le rang local implique le 1-pistage.*

On utilise:

(3.3) Lemme. *Si $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ est de rang local, alors on peut supposer que les tours de Rokhlin $\theta_1, \theta_2, \dots$ ci-dessus vérifient de plus:*

(1) *pour chaque $k \geq 1$,*

$$\mu(\theta_{n+1} \setminus (\theta_k \cup \dots \cup \theta_n)) / \mu(\theta_{n+1}) \mu(X \setminus \theta_k \cup \dots \cup \theta_n))) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

(on convient de ce que $0/0 = 1$).

(2) $h_{n+1}/h_n \to \infty$.

Preuve du lemme. On utilise la caractérisation du rang local rappelée ci-dessus. En passant à une sous-suite (ii) donne (2). La seule chose à vérifier est le point (1). Soit $n \geq 10$. Voyons qu'on peut supposer que l'écart dans (1) par rapport à la limite est majoré par $1/n$ pour $1 \leq k \leq n$ (pour une sous-suite légèrement modifiée).

Soit $U_k = \theta_k \cup \dots \cup \theta_n$. Si $\mu(U_k) = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $\mu(U_k) < 1$. D'après le théorème ergodique de Birkhoff, il existe Y de mesure au moins $1 - a/n$ et $L < \infty$ tel que si $x \in Y$ et $m \geq L$ alors, pour chaque $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \chi_{X \setminus U_k}(T^p x) = (1 + 1/n)^{\pm 1} \mu(X \setminus U_k) > 0 \tag{3.4}$$

($x^{\pm 1}$ repré nsentant un nombre entre x^{-1} et x^{+1}).

Quitte à sauter un certain nombre de tours dans la suite $\theta_{n+1}, \theta_{n+2}, \ldots$ on peut supposer que $h_{n+1} \geq 2L$. Quitte à enlever de θ_{n+1} une fraction majorée en mesure et en hauteur par $1/n$, on peut supposer que son premier niveau rencontre Y sur un ensemble de mesure positive. La hauteur restante est minorée par L, donc, vu l'emboîtement, (3.4) donne, pour chaque $1 \leq k \leq n$:

$$\left| \frac{\mu(\theta_{n+1} \setminus (\theta_k \cup \cdots \cup \theta_n))}{\mu(\theta_{n+1})\mu(X \setminus \theta_k \cup \cdots \cup \theta_n)))} - 1 \right| \leq \frac{1}{n}.$$

On peut donc définir la sous-suite de tours par récurrence sur n. $\square$

Preuve de la proposition. Soit T de rang local. On applique le lemme précédent. Notons P la partition génératrice pour laquelle les tours sont pures. Soit $\omega^n \in P^{h_n}$ défini par: le $i$ème niveau de θ_n est inclus dans ω_i^n. Soit $\omega \in P^{\mathbb{N}}$ défini par $\omega_{h_n} \ldots \omega_{h_{n+1}-1} = \omega_{h_n}^{n+1} \ldots \omega_{h_{n+1}-1}^{n+1}$.

Montrons que $\mu(\bigcup_{n \geq N} \theta_n) = 1$ quel que soit $N < \infty$. Posons $U_m = \bigcup_{k=N}^m \theta_k$ et $\epsilon_m = |1 - \mu(\theta_{m+1} \setminus U_m)/\mu(\theta_{m+1})\mu(X \setminus U_m)|$. On calcule:

$$\begin{aligned}
\mu\left(X \setminus U_{m+1}\right) &= 1 - (\mu(U_m) + \mu(\theta_{m+1} \setminus U_m)) \\
&\leq 1 - \mu(U_m) - (1 - \epsilon_m)\mu(\theta_{m+1})\mu(X \setminus U_m) \\
&\leq \mu(X \setminus U_m)(1 - (1 - \epsilon_m)\mu(\theta_{m+1}))
\end{aligned}$$

Comme $\sum_m \mu(\theta_m) = \infty$, on voit que $\mu(U_m)$ tend vers 1. On en déduit: μ-presque tout $x \in X$ est dans θ_m pour des m arbitrairement grands. Autrement dit: $P^{[-k,-k+h_m]}(x) = \omega^m$. Donc: $P^{[-k+h_{m-1},-k+h_m]}(x) = \omega_{h_{m-1}} \ldots \omega_{h_m-1}$ et:

$$\bar{d}(P^{[-k,-k+h_m]}(x), \omega_0 \ldots \omega_{h_m}) \leq 2h_{m-1}/h_m \to 0.$$

Ci-dessus, $k \geq 0$, $-k + h_m \geq 0$ et $h_m \to \infty$. On a donc le 1-pistage d'après la caractérisation (C1) du théorème C. $\square$

3.3. **Description topologique.**

On voudrait munir l'ensemble des systèmes d'entropie nulle d'une notion topologique d'ensemble négligeable. Les ensembles de première catégorie c'est-à-dire union d'une collection dénombrable de fermés d'intérieur vide fournissent une telle notion pourvu que l'espace lui-même ne soit pas de première catégorie. D'après le théorème de Baire, il suffit que l'espace soit un espace métrique complet.

Pour avoir une telle structure, on considère plutôt que les systèmes dynamiques les processus stochastiques. Rappelons qu'un **processus stochastique** sur N symboles est simplement la donnée d'une mesure de probabilité invariante du décalage sur N symboles. Tout système dynamique probabiliste T muni d'une partition α (finie et mesurable) ordonnée $P = \{P_0, \ldots, P_{N-1}\}$ définit un tel processus noté (T, P).

On dira que le processus (T, P) est 1-pisté si le système dynamique induit sur le décalage est 1-pisté comme système dynamique probabiliste. Soulignons qu'on ne demande pas qu'il soit 1-pisté par rapport à la partition canonique du décalage.

Une "bonne" distance est la distance $\bar{d}$ fournie par la distance de Hamming entre suites finies. Soit (X, T, μ, α) et (Y, S, ν, β) deux processus. Si $\#\alpha \neq \#\beta$, alors $\bar{d}((T, \alpha), (S, \beta)) = 1$. Sinon:

$$\bar{d}((T, \alpha), (S, \beta)) = \sup_{n=1,2,\ldots} \inf_{\phi} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d(T^{-k}\alpha, \phi S^{-k}\beta)$$

où:

(1) $\phi : Y \to X$ décrit les isomorphismes entre espaces de probabilité (ne préservant pas nécessairement la dynamique).
(2) $d(\alpha, \alpha') = \sum_{i=1}^{N} \mu(\alpha_i \,\Delta\, \alpha_i')$.

Remarquons que $\bar{d}$ n'induit pas une distance entre systèmes dynamiques probabilistes. En particulier si T et S sont deux systèmes d'entropie nulle alors il existe des partitions génératrices α, β à deux éléments telles que $\bar{d}((T,\alpha),(S,\beta))$ est arbitrairement petite.

(3.5) Proposition (par exemple [16,19]**).** $\bar{d}((T,\alpha),(S,\beta)) = 0$ *ssi les processus sont identiques. L'ensemble des processus ergodiques d'entropie nulle est un espace métrique complet pour* $\bar{d}$*.*

$\bar{d}((T,\alpha),(S,\beta)) < \epsilon$ *est équivalente à n'importe laquelle des deux conditions suivantes :*

(1) *le nom-*T, α *de* μ*-presque tout point peut être transformé en un nom générique pour* S, β *en ne modifiant ce nom que sur un ensemble de fréquence* $< \epsilon$*.*
(2) *il existe un nom générique pour* T, α *et un nom générique pour* S, β *qui ne diffèrent que sur une sous-suite de fréquence* $< \epsilon$*.*

On veut montrer:

(3.6) Proposition. *L'ensemble des systèmes* 1*-pistés est un ensemble topologiquement négligeable et même un fermé d'intérieur vide dans la classe des processus ergodiques d'entropie nulle munie de* $\bar{d}$*.*

On admet l'existence d'un système d'entropie nulle non 1-pisté, système dont nous construirons un exemple dans la section 5.

Preuve. Tout d'abord, montrons que l'ensemble des processus 1-pistés est fermé.

Soit $(T_1, \alpha_1), (T_2, \alpha_2), \dots$ tendant vers (T, α) au sens de $\bar{d}$. Supposons α et les α_n génératrices et chaque T_n 1-pisté et montrons que T l'est alors aussi. On utilise la caractérisation (C2) (théorème C). Soit $0 < \epsilon < 1$. Soit n tel que $\bar{d}(T_n, T) < \epsilon^2/4$.

T_n étant pisté, il existe $\omega \in (\alpha_n)^{\mathbb{N}}$ tel que le nom α_n, T_n de μ_n-presque tout point peut être $(1-\epsilon/2)$-recouvert par des $\bar{d} - \epsilon/2$-copies de débuts de ω de longueur au moins $6\epsilon^{-1}N$. D'après la proposition 3.5, on en déduit que le nom α, T de μ-presque tout point peut être $(1-\epsilon)$-recouvert par des $\bar{d} - \epsilon$-copies de débuts de ω, identifiée à une suite à valeurs dans α, de longueur au moins $2\epsilon^{-1}N$.

En utilisant à nouveau (C2), on voit que le système T, donc le processus (T, P), est bien 1-pisté. L'ensemble des processus 1-pistés est bien fermé. Pour voir qu'il est d'intérieur vide, on admet provisoirement l'existence d'un système (U, ρ) d'entropie nulle qui n'est pas 1-pisté (la section 5 en donne un exemple).

Considérons un processus ergodique 1-pisté (T, μ, P). On suppose P génératrice. Soit $\epsilon > 0$. Il s'agit de construire un processus (S, Q) avec $\bar{d}((T,P),(S,Q)) < \epsilon$ et S non 1-pisté.

Tout d'abord, quitte à remplacer (T, P) par un processus arbitrairement proche au sens de $\bar{d}$, on peut supposer que, pour un entier r assez grand, il y a au plus $\#P^r/(\#Q+1)$ cylindres de longueur r de (T, P) ayant une mesure non-nulle. On note P_r l'ensemble de ces cylindres.

En effet, T étant d'entropie nulle, le cardinal minimal d'une collection de r-cylindres dont l'union a une mesure supérieure à $1-\epsilon$ est plus petit que $e^{\epsilon r} <$

$\#P^r/r(\#Q+1)$ pour r assez grand. Fixons un tel r et une collection P_r correspondante. Considérons la projection $\pi : P^{\mathbb{Z}} \to P^{\mathbb{Z}}$ induite par une application par bloc $P^r \to P_r$ coïncidant avec l'identité sur P_r. Posons $\nu = \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1}\sigma^s\pi(\mu)$ (on a identifié X à $P^{\mathbb{Z}}$). Le processus $(P^{\mathbb{Z}},\sigma,\nu)$ a au plus $r\#P_r$ r-cylindres de mesure non-nulle: il répond au problème.

On part de:

$$\begin{array}{rcl} T' \ : X\times\{0,\dots,M-1\}\times Y & \to & X\times\{0,\dots,M-1\}\times Y \\ (x,k,y) & \longmapsto & (Tx, k+1 \mod M, U^{\delta_{0k}}(y)) \end{array}$$

avec $M = r\lceil\epsilon^{-1}\rceil$ et $\delta_{ij}=1$ si $i=j$, 0 sinon. On munit T' de la mesure $\mu\times n\times\rho$ avec n la mesure de comptage normalisée.

Fixons une injection $i : P_r\times(Q\cup\{*\})\to P^r$. On considère l'application:

$$(x,k,y)\mapsto\begin{cases} i(P^r(x)\times *) & \text{si } k\neq 0\\ i(P^r(x)\times Q(y)) & \text{si } k=0.\end{cases}$$

Elle induit un codage, non T'-invariant, ψ de $X\times\{0,\dots,M-1\}\times Y$ dans $(P_r)^{\mathbb{Z}}\subset P^{\mathbb{Z}}$. On pose $\mu' = \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1}\sigma^s\psi(\mu\times n\times\rho)$. Soit S le décalage muni de μ' et Q la partition canonique de $P^{\mathbb{Z}}$. Clairement, (S,Q) est ergodique et d'entropie nulle et vérifie: $\bar{d}((X,P),(S,Q))<\epsilon$.

Supposons S 1-pisté et tirons-en une contradiction.

Tout d'abord, tout itéré S^k serait encore pisté. En effet, si S est (Q',Σ)-pisté alors S^k est $({Q'}^k,\Sigma^k)$-pisté avec:

$$\Sigma^k = \{(\omega_i\omega_{i+1}\dots\omega_{i+k-1})(\omega_{i+k}\dots)\dots\in({Q'}^k)^{\mathbb{N}} : i=0,\dots,k-1\}.$$

Σ^k étant un ensemble fini, c'est dire que S^k est encore 1-pisté. Donc S^M est 1-pisté.

Mais U est un facteur de l'itéré S^M. Voyons que ceci implique que U est 1-pisté, donc une contradiction. En effet, utilisons la caractérisation (C1). Soit R une partition génératrice U. Il suffit d'appliquer (C1) à la partition $\pi^{-1}U$ de S^M, puis de projeter pour obtenir (C1) pour U par rapport à R. S n'est donc pas 1-pisté. □

3.4. **Preuve du théorème B.**

Suites pistantes et suites génériques. Pour voir qu'une suite pistante ω est quasi-générique, il suffit d'appliquer le théorème ergodique à T et T^{-1}: on obtient que, pour presque tout point, dès que les entiers n,m sont assez grands, les fréquences le long du segment $[-n,m]$ de l'orbite sont bonnes. En comparant avec la définition du 1-pistage, on voit qu'il existe une suite d'entiers, de la forme n_i+m_i avec les notations de cette définition, tels que les fréquences de $\omega|[0,n_i+m_i]$ tendent vers les bonnes fréquences. Autrement dit, la suite pistante est quasi-générique.

Pour voir que ω n'est pas forcément générique, il suffit de considérer les suites construites ci-dessous pistant simultanément des mesures distinctes. Ces suites, quasi-génériques pour plus d'une mesure, sont nécessairement non-génériques. □

Abondance topologique. Soit G_ℓ l'ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dont le début est de la forme BXB^m avec B une suite de ℓ symboles, X une suite finie quelconque sur $\{0,1\}$ et m un entier suffisamment grand pour que $(m+1)\ell>\ell^2|X|$ et $m\geq\ell^2$.

G_ℓ est manifestement un ouvert dense de l'espace de Baire $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Donc $G=\bigcap_{\ell\geq1}G_\ell$ est un G_δ-dense.

Soit $\omega \in G$. Considérons le système de rang un défini symboliquement par $B_0 = \omega_0$ et $B_{n+1} = B_n X_n B_n^m$ avec X_n défini par:

$$\omega_0 \dots \omega_{k-1} = B_n X_n B_n^m \qquad \text{avec } k = (m+1)|B_n| + |X_n|,\ m \geq |B_n|^2$$

est l'écriture la plus courte manifestant l'appartenance de ω à G_ℓ avec $\ell = |B_n| \geq n$. Ceci définit bien un système de rang un en raison de l'inégalité: $|X_n| \leq n^{-2}|B_{n+1}|$.

Tout segment fini extrait du nom de μ-presque tout point coïncide avec un extrait de B_n pour tout n assez grand. Mais chaque B_n est un début de ω. Donc ce système de rang un est bien pisté par ω pour la partition canonique. □

Abondance au sens de la mesure. Soit T de rang local. Soit P une partition génératrice par rapport à laquelle T soit pisté. Le rang local peut être défini par le fait qu'une fraction uniformément minorée du P-nom de presque tout point consiste en des copies exactes d'un mot arbitrairement long. En procédant comme dans la preuve de du théorème C et en utilisant la remarque 2.7, on déduit de la propriété de rang local l'existence d'une suite infinie de tours de Rokhlin qui sont:

(i) deux-à-deux emboîtées.
(ii) de hauteurs tendant vers l'infini.
(iii) de mesures minorées par une constante $a > 0$.
(iv) chacune pure par rapport à P, la partition donnée ci-dessus.

Enfin, on procède comme pour le lemme 3.3 pour voir qu'on peut aussi supposer:

(1) $\mathcal{A}_n$ désignant l'algèbre finie engendrée par les partitions associées à $\theta_1, \dots, \theta_n$:

$$\sup_{A \in \mathcal{A}_n} \left| \frac{\mu(A \cap \theta_{n+1})}{\mu(A)\mu(\theta_{n+1})} - 1 \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) $h_{n+1}/h_n \to \infty$.

La propriété d'indépendance (1) permet de voir que μ-presque tout x appartient à $\bigcup_{k=0}^{h_n/n} T^k B_n$ pour une infinité de n, si B_n, h_n sont la base et la hauteur de θ_n, en utilisant $\prod_n (1 - a/n) = 0$.

x étant fixé, on peut donc supposer qu'il appartient à $\bigcup_{k=0}^{h_n/n} T^k B_n$ pour **tout** $n \geq 1$, en passant à une sous-suite.

Posons $\theta'_n = \bigcup_{k=2h_n/n}^{h_n} T^k B_n$. $y \in \theta'_n$ implique que $P^{[-a,b]}(y) = P^{[0,a+b]}(x)$ avec $a \geq h_n/n$ et $b \geq 0$. La propriété (1) donne comme ci-dessus que $\bigcup_{n \geq N} \theta'_n = X$ modulo μ, pour tout N (en effet $\mu(\theta'_n)/\mu(\theta_n) \to 1$). Donc μ-presque tout y est dans une infinité de θ'_n. On a donc le 1-pistage par le P-nom de x d'après la caractérisation (C1). □

Co-pistage. On considère donc deux systèmes dynamiques 1-pistés apériodiques et ergodiques T et T'. On veut trouver un entier N, une partition génératrice à N éléments pour chacun (P et P') et une suite $\alpha \in \{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{N}}$ telles que les systèmes soient pistés par rapport à $(P, P_{\alpha_0} P_{\alpha_1} \dots)$, resp. $(P', P'_{\alpha_0} P'_{\alpha_1} \dots)$.

Comme souligné dans la remarque 2.13, la construction d'une suite de tours emboîtées permet d'obtenir une partition génératrice à deux éléments qui est admissible par le pistage et qui induit un codage envoyant la mesure sur une mesure ayant le décalage tout entier pour support. On peut supposer que les deux systèmes sont portés par le décalage $\{0, 1, \dots, N-1\}^{\mathbb{Z}}$, ont pour même support (l'espace tout entier) et sont 1-pistés par rapport à la partition canonique.

Remarquons tout d'abord que le cylindre défini par un mot quelconque $a_0 \dots a_n$ est de μ-mesure positive ssi $a_0 \dots a_n$ apparait dans ω. L'égalité des supports entraîne donc que les mêmes mots finis apparaissent dans ω et dans ω'.

Construisons maintenant une suite α pistant les deux systèmes.

Supposons que pour un $n \geq 1$, on a déjà trouvé:

$$\alpha_0 \dots \alpha_{L-1} = \omega_d \dots \omega_{d+L-1} = \omega'_{d'} \dots \omega'_{d'+L-1} \qquad d, d' \geq 0 \text{ et } L \geq n-1.$$

tel qu'on puisse recouvrir une fraction au moins $1 - 1/n$ du nom de μ- et ν-presque tout point par des copies exactes de segments initiaux de longueur $\geq n-1$ de $\alpha_0 \dots \alpha_{L-1}$. Remarquons que cette assertion est triviale pour $n = 1$.

Soit un entier ℓ suffisamment grand pour que des copies exactes de débuts de ω de longueurs comprises entre $\ell_- \stackrel{\text{def}}{=} 2(n+1)d$ et ℓ permettent de recouvrir $1-1/2(n+1)$ de μ-presque toute orbite. Prolongeons α en posant:

$$\alpha_0 \dots \alpha_{K-1} = \omega_d \dots \omega_{\ell-1} \qquad \text{avec } K = \ell - d.$$

On peut ainsi recouvrir $1 - 1/2(n+1) - d/\ell_- = 1/(n+1)$ de μ-presque toute orbite avec des débuts de $\alpha_0 \dots \alpha_{K-1}$ de longueur au moins n.

D'après la remarque ci-dessus, $\alpha_0 \dots \alpha_{K-1}$ apparaissant dans ω apparaît aussi dans ω': il existe d'' tel que $\omega'_{d''} \dots \omega'_{d''+K-1}$ coïncide avec ce mot.

On procède alors comme ci-dessus en remplaçant $d + L$ par $d'' + K$, μ par ν et ω par ω'. On obtient un prolongement $\alpha_0 \dots \alpha_{L'-1}$ avec les propriétés voulues au rang n.

On obtient donc par récurrence une suite infinie α qui piste à la fois μ et ν. $\square$

(3.7) *Remarque.* La même démonstration se généralise à une infinité dénombrable de systèmes 1-pistés ergodiques et apériodiques. Par contre, le cas d'une infinité non-dénombrable ou encore d'une suite universelle reste entier. $\square$

4. Un système 1-pisté non-L.B.

L'exemple construit dans cette section est en partie inspirée par la construction par J. Feldman d'un système d'entropie nulle non-L.B. [5].

Rappelons la définition de la propriété L.B. (cf. [14]) (on se restreint dans cet article aux systèmes d'entropie nulle). C'est la fermeture, par induction et suspension, de l'ensemble des rotations irrationnelles. Le point de vue le plus commode pour nous est fourni par la caractérisation symbolique donnée par J. Feldman [5] en terme de la **distance** $\bar{f}$ entre suites finies:

$$\bar{f}(a, b) = \frac{\varepsilon}{|a| + |b|}$$

où ε est le nombre minimal de symboles à effacer dans a et dans b pour obtenir des suites identiques, i.e., c'est le plus petit entier ε tel qu'il existe deux suites de longueur $r = (|a| + |b| - \varepsilon)/2$: $0 \leq i_1 < \cdots < i_r < |a|$ et $0 \leq j_1 < \cdots < j_r < |b|$, telles que $a_{i_1} \dots a_{i_r} = b_{i_1} \dots b_{i_r}$. On dit que (i, j) est un **couplage** de **longueur** r.

(4.1) Définition (J. Feldman). *Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$. Si P est une partition de X et $n \geq 1$, on définit la pseudo-distance $\bar{f}^n_P(x, y) = \bar{f}(P^{[0,n[}(x), P^{[0,n[}(y))$.*

T est L.B. ssi pour toute partition P et tout $\epsilon > 0$, pour tout n assez grand, il existe une boule pour la pseudo-distance $\bar{f}^n_P$ de rayon ϵ dont la mesure soit $\geq 1 - \epsilon$.

On montre [14] qu'il est équivalent de demander la propriété ci-dessus pour *une* partition génératrice.

4.1. **Construction par blocs.** La démarche est standard. On la rappelle pour fixer les notations:

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini contenant le symbole 0. Pour chaque ordre $n \geq n_0$, on définit une collection de **types de blocs** $\{B_n^1, \dots, B_n^{N(n)}\}$. Chaque B_n^i est une suite finie $B_n^i(0) \dots B_n^i(l_n^i - 1)$:

— à valeurs dans $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ si $n = n_0$.

— à valeurs dans $\mathcal{B}_{n-1} = \{0, B_{n-1}^1, \dots, B_{n-1}^{N(n-1)}\}$ si $n > n_0$.

On pose $\mathcal{B}_{n_0-1} = \mathcal{A}$.

Si B est une suite de termes pris dans $\mathcal{B}_n$, on note $\phi(B)$ la suite sur $\mathcal{B}_{n-1}$ obtenue en juxtaposant les termes de B. Pour $m \leq n$, on appelle m-développement de B la suite $\phi^{n-m}(B)$ sur $\mathcal{B}_m$. Enfin le terme de **développement**, sans autre précision, désigne le n_0-développement. C'est une suite sur $\mathcal{A}$.

On note b_n^i le développement de B_n^i.

Notons $p(B|B')$ la fraction de la longueur occupée par le développement de B dans le développement de B'.

Supposons que chaque B_n^i apparaît au moins une fois dans chaque B_{n+1}^j et que:

$$\sum_{n \geq n_0} \sup_k p(0|B_n^k) < \infty \text{ et } \sup_{n \geq n_0} \sup_{i,k,l} \frac{p(B_n^i|B_{n+1}^k)}{p(B_n^i|B_{n+1}^l)} < \infty.$$

Il existe alors un unique automorphisme d'espace de Lebesgue $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ tel que, à chaque type de bloc B_n^i est associée une tour de Rokhlin de base R_n^i et de hauteur $|b_n^i|$, avec les propriétés suivantes:

(1) l'union des tours d'ordre n, $\bigcup_{i=1}^{N(n)} \bigcup_{k=0}^{|b_n^i|-1} T^k R_n^i$ est de mesure tendant vers 1 quand $n \to \infty$.

(2) emboîtement: $T^\ell R_n^j$ est l'union des $T^k R_{n+1}^i$ tels que le $k$ième symbole du développement de B_{n+1}^i correspond au ℓième symbole du développement de B_n^j.

On en déduit que:

$$\mu(R_n^j)|b_n^j| = \lim_{m \to \infty} p(B_n^j|B_m^{i_m})$$

quelle que soit la suite des entiers $i_m \in \{1, \dots, N(m)\}$. De plus, T est ergodique.

La partition standard définie par une telle construction est $\{P_A : A \in \mathcal{A}\}$ avec: P_A l'union des $T^k R_{n_0}^i$ si le $k$ième symbole de $B_{n_0}^i$ est $A \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, et P_0 le reste de l'espace X.

4.2. **Définition de l'exemple.** Pour motiver cette définition, faisons quelques remarques.

• Pour garantir le 1-pistage d'un système $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma, \mu)$ défini comme ci-dessus, il suffit d'avoir, pour tout $n \geq n_0$:

(1) $p(B_n^1|B_{n+1}^i) \geq 1/n$ pour tout i.

(2) le type B_{n+1}^1 commence par B_n^1 pour tout $n \geq n_0$.

(3) $\min_i |b_n^i| \to \infty$.

Preuve du 1*-pistage.* Grâce à (2), on peut définir $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ par:

$$\omega|[0, |b_n^1|[= b_n^1 \qquad \text{pour chaque } n \geq n_0.$$

Comme $\prod_n(1-1/n)=0$, on déduit de (1) que, pour μ-presque tout $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, il existe $n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \ldots$ tels que x est dans la tour associée à $B^1_{n_p}$, en particulier: $P^{[-a_p,b_p]}(x) = b^1_{n_p}$ avec $a_p, b_p \geq 0$ et $a_p + b_p = |b^l_{n_p}| \to \infty$.

La caractérisation (C1) du théorème C implique que (σ,μ) est ω-pisté par rapport à la partition P. Le système obtenu en quotientant $(X,\mathcal{B},T,\mu)$ par la tribu $\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} T^k P$ est donc 1-pisté.

$\square$

• Pour empêcher la propriété L.B. pour ce même système quotient il suffit de maintenir l'écart entre les blocs de types différents, i.e., il suffit (cf. [17, lemma 2.6]) de trouver une constante $\delta_* > 0$ tel que:

$$\inf_{i\neq j} \bar{f}(b^i_n, b^j_n) \geq \delta_* > 0 \qquad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Pour obtenir une telle minoration, on procède bien sûr par récurrence. Mais un couplage entre deux $n+1$-blocs n'est pas forcément compatible avec le découpage de chacun des deux $n+1$-blocs en leurs n-blocs. On sera donc amené à minorer:

$$\bar{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u,v} \bar{f}(u,v)$$

où u et v parcourent les segments de longueurs $\geq |b_n|/n^2$ extraits de n-blocs de types distincts, $|b_n|$ étant la longueur commune des b^i_n, quel que soit i.

Très grossièrement, si on considère un couplage entre u et v comme ci-dessus, alors la force de ce couplage est donnée par:

$$[1-\bar{f}(u,v)] \leq (1-\gamma)\left\{(1-\delta)[1-\bar{f}(n)] + \delta\cdot 1\right\} = (1-\gamma)\left\{1-(1-\delta)\bar{f}(n)\right\}$$

avec γ la proportion des $n-1$-blocs que le couplage considéré efface intégralement et δ la proportion de $n-1$-blocs de même type qu'il met en correspondance.

Pour que montrer que $\bar{f}(n)$ ne tend pas vers zéro, la meilleure majoration possible sur δ seul, $\delta \leq \max_i p(B^i_n) = 1/n$, est insuffisante. Mais si les occurrences d'un type de n-bloc donné dans b^i_{n+1} et celles dans b^j_{n+1} sont suffisamment enchevêtrées, alors on ne pourra en coupler une fraction significative ($\delta \geq n^{-3/2}$) sans avoir aussi à effacer beaucoup de n-blocs ($\gamma \geq n^{-3/2}$).

Cet enchevêtrement sera obtenu en disposant les B^t_n de façon **indépendante** dans B^i_{n+1} et B^j_{n+1} si $i \neq j$.

On obtient ainsi la définition suivante pour notre système. A l'ordre $n+1$, on définit $N(n+1) \stackrel{\text{def}}{=} n!+1$ types de blocs en posant:

$$B^i_{n+1} = \left(C^i_{n+1}\right)^{\beta_n^{N(n+1)-i+1}} \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,N(n+1).$$

avec:

$$C^i_{n+1} = \underbrace{B^1_n \ldots\ldots\ldots B^1_n}_{\beta_n^{i-1}\nu_n}\ \underbrace{B^2_n \ldots B^2_n}_{\beta_n^{i-1}}\ \cdots\ \underbrace{B^{N(n)}_n \ldots B^{N(n)}_n}_{\beta_n^{i-1}}$$

où $\beta_n = |C^1_{n+1}| = \nu_n + N(n) - 1$ et $\nu_n = (N(n)-1)/(n-1)$.

En particulier, le $k$ième bloc dans B^i_{n+1} est de type $t \neq 1$ (resp. de type 1) si $t-1+\nu_n$ (resp. si un symbole $< \nu_n$) est le $i$ième chiffre de $k-1$ en base β_n: ceci fournit l'indépendance recherchée.

Remarquons que le choix de ν_n garantit que $p(B^1_n|B^i_{n+1}) = 1/n$ et que le nombre de répétitions de C^i_{n+1} est toujours très grand ($\geq \beta$) et que la longueur de B^i_{n+1} est indépendante de i. On note: $|B_n| \overset{\text{def}}{=} |B^i_n|$ pour tout i. Remarquons que:

$$|C^k_{n+1}| = \beta_n^{k-1}(N(n) - 1 + \nu_n)$$
$$|B_{n+1}| = |b_{n+1}|/|b_n| = \beta_n^{N(n+1)+1} = \left((N(n)-1)\cdot\frac{n}{n-1}\right)^{N(n+1)+1}.$$

Cette quantité croît en fonction de n de façon super-exponentielle.

4.3. **Preuve du caractère non-L.B.** Elle repose sur les deux lemmes suivants.

Le premier permet de traiter le cas des couplages entre $n+1$-blocs de type distincts dont une proportion significative des appariements se produisent entre n-blocs de même type. C'est ici qu'on utilise la structure particulière de notre exemple et en particulier l'enchevêtrement.

(4.2) Lemme (enchevêtrement). *Soit (I,J) un couplage entre $U = C^k_{n+1}$ et $V = \left(C^{k'}_{n+1}\right)^q$ avec $k > k'$ et $q \geq 1$. Notons M la longueur de ce couplage.*

Supposons que $\kappa \overset{\text{def}}{=} \frac{2M}{|U|+|V|} \geq 200n^2/\beta_n$. Alors les indices des appariements entre symboles B^1_n dans U et dans V forment un intervalle, i.e., $(U\circ I)^{-1}(B^1_n) = [M', M'']$ avec:

$$M' = 1 \text{ et } M'' \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)M$$
$$I(M') \leq \frac{1}{n}|U| \text{ et } J(M') \geq \frac{n}{2}\kappa|V|$$

Le deuxième lemme traite le cas des autres couplages.

(4.3) Lemme. *Soit U et V des segments extraits de B^k_{n+1} et $B^{k'}_{n+1}$. Soit u, v les développements de U et de V. Supposons qu'un des couplages (i,j) réalisant $\bar{f}(u,v)$ ne fasse correspondre que peu de symboles figurant dans des n-blocs de même type, i.e., supposons que:*

$$R = \#\{s : U([i_s/|b_n|]) = V([j_s/|b_n|])\} \leq \frac{1}{n^{3/2}}\frac{|U|+|V|}{2}.$$

Alors:

$$\bar{f}(u,v) \geq \min\left(\bar{f}(n) - \frac{const}{n^{3/2}}, \frac{1}{5}\right).$$

Appliquons ces deux lemmes avant de les démontrer.

(4.4) Affirmation. *Pour tout $n \geq n_0$,*

$$\bar{f}(n+1) \geq \max\left(\bar{f}(n) - \frac{const}{n^{3/2}}, \frac{1}{5}\right).$$

Preuve de l'affirmation. Soit u, v comme dans la définition de $\bar{f}(n+1)$: des segments de longueurs $\geq |b_{n+1}|/n^2$ extraits de $n+1$-blocs $b^k_{n+1}, b^{k'}_{n+1}$ avec $k < k'$. Quitte à changer $\bar{f}(u,v)$ d'au plus $|C^{N(n+1)}_{n+1}|/(n^2|B_{n+1}|) = n^2\beta_n^{-1} = o(n^{-3/2})$, on peut supposer que u est le développement de U, la concaténation d'un certain nombre de C^k_{n+1}.

Ecrivons $u = u^1 \dots u^q$, où chaque u^p est une copie du développement de C^k_{n+1}. Découpons $v = v^1 \dots v^q$ de façon **compatible modulo** (i,j), i.e., si i_m tombe dans u^p, alors j_m tombe dans v^p. On a donc:

$$\bar{f}(u,v) = \sum_{p=1}^{q} \frac{|u^p| + |v^p|}{|u| + |v|} \bar{f}(u^p, v^p).$$

Il suffit donc de minorer $\bar{f}(u',v')$ avec u' le développement de C^k_{n+1} et v' extrait du développement de $C^{k'}_{n+1}$ répété indéfiniment. Si $|v'| \leq (2/3)|u'|$, alors $\bar{f}(u',v') \geq 1/5$ et il n'y a rien d'autre à démontrer. On peut supposer que $|v'| \geq (2/3)|u'|$. La longueur $|v'|$ est donc au moins de l'ordre de $\beta_n|C^{k'}_{n+1}|$. On peut donc supposer également que v' est le développement de $V' = (C^{k'}_{n+1})^Q$ avec Q très grand.

On omet désormais les primes sur u, v, U, V.

Fixons (i,j) un couplage entre u et v réalisant la distance $\bar{f}(u,v)$. Soit (I,J) le couplage induit entre U et V, i.e., en notant M sa longueur:

$$\{(I_m, J_m) : m = 1, \dots, M\} = \{(i_s, j_s) : U([i_s/|b_n|]) = V([j_s/|b_n|])\}.$$

Si $2M/(|U|+|V|) < n^{-3/2}$, il suffit d'appliquer le lemme 4.3. Supposons maintenant: $2M/(|U|+|V|) \geq n^{-3/2} \geq 200n^2/\beta_n$.

Découpons $U = U'U''$, U' regroupant les symboles B^1_n et U'' les autres. Ceci induit un découpage $u = u'u''$. Soit $V = V'V''$ tel que le découpage induit $v = v'v''$ soit compatible modulo (i,j) (ce qui est plus fort que modulo (I,J)).

D'après le lemme 4.2, on a $|U'| = |U|/n$ et $|V'| \geq \frac{n}{2}\frac{2}{n^{3/2}}|U| = |U|/n^{1/2}$. Donc $\bar{f}(u',v') \geq 1 - \mathrm{const}/n^{1/2} \geq 1/2$ et:

$$\bar{f}(u,v) \geq \frac{|u'| + |v'|}{|u| + |v|}\frac{1}{2} + \frac{|u''| + |v''|}{|u| + |v|}\bar{f}(u'', v'')$$

Maintenant, toujours d'après le lemme 4.2, le couplage entre U'' et V'' est de longueur au plus $M/n^2 \leq (|U|+|V|)/n^2$, toujours à cause du lemme 4.2. On peut donc appliquer le lemme 4.3, qui donne la minoration voulue.

L'affirmation est démontrée. Le système n'est pas L.B. $\square$

Preuve du lemme 4.2. On omet l'indice n là où cela ne provoque pas de confusion: on écrira donc $N, \beta, \nu, \dots$ au lieu de $N(n), \beta_n, \nu_n, \dots$.

Remarquons que, par construction, l'application $t \mapsto U_i = C^k_{n+1}(i)$ est croissante (en identifiant B^i_n à l'entier i). On en déduit que, pour chaque i, $(U \circ I)^{-1}(B^i_n)$

est un intervalle. Notons a_i le nombre d'appariements entre symboles B_n^i. Par construction: $0 \leq a_1 \leq \nu\beta^{k-1}$ et, pour $i = 2, \dots, N$, $0 \leq a_i \leq \beta^{k-1}$. Soit:

$$\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \{i = 1, \dots, N : a_i \geq 10\nu(i)\beta^{k'-1}\}$$

avec $\nu(1) = \nu_n$ et $\nu(i) = 1$ pour $i = 2, \dots, N$.

On calcule: $\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \leq 10\beta^{k'-1}(N - 1 + \nu) = 10\beta^{k'-k}|U|$. Par hypothèse, $k - k' \geq 1$, donc:

$$\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \leq 10\beta^{-1}|U| \leq \frac{1}{10n^2}\frac{100n^2}{\beta} \cdot 2\frac{|U| + |V|}{2} \leq \frac{1}{10n^2}M.$$

D'où:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = M - \sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \geq \left(1 - \frac{1}{10}\frac{1}{n^2}\right)M.$$

Soit $i \in \mathcal{I}$. $(U \circ I)^{-1}(i)$ est un intervalle $[m_-, m_+]$ de a_i entiers. Remarquons que les symboles B_n^i apparaissent dans V par segments de longueur $\nu(i)\beta^{k'-1}$ se reproduisant à intervalles de longueur $\beta^{k'}$. D'où:

$$J(m_+) - J(m_-) \geq \beta^{k'}\left(\left\lceil a_i/\nu(i)\beta^{k'-1}\right\rceil - 1\right)$$

($\lceil x \rceil$ désignant le plus petit entier $\geq x$). Mais $a_i/\nu(i)\beta^{k'-1} \geq 10$ (car $i \in \mathcal{I}$) donc:

$$J(m_+) - J(m_-) \geq \frac{9}{10}\frac{\beta}{\nu(i)}a_i. \tag{4.5}$$

Si on avait:

$$a_2 + \cdots + a_N \geq M/n^2 \tag{4.6}$$

alors on aurait: $\sum_{i \in \mathcal{I}\setminus 1} a_i \geq \sum_{i \neq 1} a_i - \sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \geq \frac{9}{10}M/n^2$ et donc:

$$\begin{aligned} J(M) - J(1) &\geq \sum_{i \in \mathcal{I}\setminus 1} J(m_+(i)) - J(m_-(i)) \geq \frac{9}{10}\beta \sum_{i \in \mathcal{I}\setminus 1} a_i \\ &\geq \frac{9}{10}\beta \cdot \frac{9}{10}\frac{M}{n^2} \geq 81 \cdot \frac{\beta M}{100n^2} \\ &\geq 81(|U| + |V|) > |V|, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. (4.6) est donc impossible. On a donc: $a_1 > (1 - 1/n^2)M$. En particulier,

$$a_1 \geq \frac{1}{2}M \geq 50n^2\beta^{-1}|U| = 50n^2\beta^{-1} \cdot \beta^{k-1}(\nu + N - 1) \geq 50n^2\nu\beta^{k-2} > 10\nu\beta^{k'-1}$$

donc $1 \in \mathcal{I}$ et, vu (4.5):

$$J(M'') - J(M') \geq \frac{9}{10}\frac{\beta}{\nu} \cdot a_1 \geq \frac{9}{10}n \cdot (1 - n^{-2})M \geq \frac{1}{2}n\kappa|V|$$

$(M = \frac{1}{2}\kappa(|U| + |V|))$.

Enfin, $U^{-1}(B_n^1) = [0, \dots, |U|/n-1]$ d'où $(U \circ I)^{-1}(B_n^1) = [M', M'']$ avec $M' = 1$ et $I(M'') \leq |U|/n$. $\square$

Preuve du Lemme 4.3. Soit $u = u^1 \dots u^s$ avec u^t le développement de $U(t)$. Soit $v = v^1 \dots v^s$ un découpage de v compatible, modulo (i, j), avec le découpage précédent de u. Réciproquement, la structure en n-blocs de V induit un découpage sur v, et donc sur chaque v^t. On écrit $v^t = v_1^t \dots v_q^t$, q dépendant de t. Soit $u^t = u_1^t \dots u_q^t$ un découpage compatible. On a alors:

$$\bar{f}(u, v) = \sum_{t=1}^{s} \frac{|u^t| + |v^t|}{|u| + |v|} \bar{f}(u^t, v^t) = \sum_{t=1}^{s} \sum_{p=1}^{q} \frac{|u_p^t| + |v_p^t|}{|u| + |v|} \bar{f}(u_p^t, v_p^t) \tag{4.7}$$

On peut écarter les termes mettant en jeu des **suites de longueurs trop différentes** qui donneront de grandes distances ($\geq 1/5$): si on pose $E_1 = \{(t, p) : \frac{|u^t|}{|v^t|}$ ou $\frac{|u_p^t|}{|v_p^t|} \notin [2/3, 3/2]\}$, alors:

$$\sum_{(t,p) \in E_1} \frac{|u_p^t| + |v_p^t|}{|u| + |v|} \bar{f}(u_p^t, u_q^t) \geq \frac{1}{5} \frac{\sum_{(t,p) \in E_1} |u_p^t| + |v_p^t|}{|u| + |v|}.$$

Vu la minoration souhaitée, on peut se placer dans le pire des cas et supposer $E_1 = \emptyset$.

On peut écarter parmi les termes restants ceux dont les **longueurs sont trop petites**, ils n'interviennent dans (4.7) que pour une fraction négligeable: soit $E_2 = \{(t, p) \notin E_1 : \min(|u_p^t|, |v_p^t|) < |b_n|/n^2\}$, alors:

$$\sum_{(t,p) \in E_2} |u_p^t| + |v_p^t| < \#E_2 \cdot \frac{5}{2} \frac{|b_n|}{n^2} \leq 3|U| \cdot \frac{5}{2} \frac{|b_n|}{n^2} \leq 3 \frac{|U|}{|B_n|} \cdot \frac{5}{2} \frac{|b_n|}{n^2} \leq 8 \frac{|u| + |v|}{n^2}$$

où on a utilisé que si $(t, p) \notin E_1$ alors v^t est de longueur au plus $(3/2)|b_n|$ et donc est à cheval sur $q \leq 3$ n-blocs. Les termes correspondants à E_2 n'interviennent dans (4.7) que pour $o(n^{-3/2})$.

Il reste donc les termes $\bar{f}(u_p^t, v_p^t)$ avec $\frac{|u_p^t|}{|v_p^t|} \in [2/3, 3/2]$ et $\min(|u_p^t|, |v_p^t|) \geq |b_n|/n^2$. On les subdivise en deux catégories: ceux tels que u_p^t, v_p^t sont extraits d'un même type de n-blocs et les autres. On note F_1, resp. F_2 l'ensemble des indices (t, p) de la première, resp. la seconde catégorie de termes.

Les premiers peuvent être à distance nulle. Les autres sont, par définition, à distance au moins $\bar{f}(n)$. Finalement, à des termes en $o(n^{-3/2})$ près:

$$\bar{f}(u, v) \geq \bar{f}(n) \left(1 - \sum_{(t,p) \in F_1} \frac{|u_p^t| + |v_p^t|}{|u| + |v|} \right).$$

Mais, par hypothèse,

$$\sum_{(t,p) \in F_1} \frac{|u_p^t| + |v_p^t|}{|u| + |v|} \leq \frac{2R}{|U| + |V|} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Le lemme est démontré. $\square$

5. Un système L.B. d'entropie nulle non 1-pisté

Les boules-$\bar{d}$ par rapport à une partition P sont les ensembles:

$$B_P(w_0\dots w_{n-1},\epsilon)=\{x\in X:\bar{d}(P^{[0,n[}(x),w_0\dots w_{n-1})<\epsilon\}\qquad w\in P^n.$$

(5.1) Théorème. *Pour tout $\Gamma>1$, il existe $(X,\mathcal{B},T,\mu)$ un automorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue qui est d'entropie nulle, lâchement Bernoulli et qui admet une partition génératrice P telle que, pour $\epsilon>0$ assez petit, on a, pour tout n assez grand:*

$$\mu(B_P(w_0\dots w_{n-1},\epsilon))\le n^{-\Gamma}\qquad\forall w\in P^n.$$

(5.2) Corollaire. *Il existe un système d'entropie nulle, lâchement Bernoulli qui n'est pas 1-pisté.*

Le corollaire découle du théorème et du critère (3.1).

(5.3) *Remarque.* On peut interpréter ce résultat en disant qu'à partir d'une rotation, pour laquelle l'exposant Γ comme ci-dessus le plus grand possible est zéro, on peut, en induisant convenablement (cf. la définition des systèmes L.B. au début de la section précédente), obtenir un exposant Γ arbitrairement grand.

(5.4) *Remarque.* Pour une partition génératrice quelconque Q, le théorème admet le corollaire suivant. Pour tout $\epsilon>0$, il existe $Y\subset X$ de mesure $1-\epsilon$ tel que, pour tout n assez grand:

$$\mu(B_Q(w_0\dots w_{n-1},\epsilon)\cap Y)\le n^{-\Gamma}\qquad\forall w\in Q^n.$$

On observe que la complexité mesurée [7] d'un système lâchement Bernoulli d'entropie nulle peut être d'un ordre polynomial arbitrairement élevé. □

On définit notre exemple par une construction par blocs comme dans la section précédente.

Soit n_0 et l_0 deux grands entiers et $\gamma>\max(\Gamma,1)$. A chaque rang $n\ge n_0$, on se donne une collection de blocs $B_n^1,\dots,B_n^{N_n}$ équiprobables.

Pour $n=n_0$ ces blocs sont les suites d'entiers disjointes suivantes:

$$B_{n_0}^i=[(i-1)l_0+1][(i-2)l_0+2]\dots[il_0]\qquad i=1,2,\dots,N_0\overset{\text{def}}{=}l_0^{\gamma-1}.$$

Pour $n+1>n_0$, on construit N_{n+1} $n+1$-blocs de même longueur l_{n+1} par concaténation de n-blocs et de symboles 0 d'après:

$$B_{n+1}^i=B_n^1 0^{a_n^i(1)}B_n^2 0^{a_n^i(2)}\dots B_n^{N_n}0^{a_n^i(N_n)}\qquad i=1,\dots,N_{n+1}.$$

Le nombre de $n+1$-blocs, N_{n+1}, sera pris égal à $l_{n+1}^{\gamma-1}$ pour obtenir l'estimation recherchée. En effet, les tours associées à chacun des B_{n+1}^i seront de mesure $1/N_{n+1}$ et donc chacun des niveaux sera de la mesure voulue, i.e., $1/N_{n+1}l_{n+1}=1/l_{n+1}^{\gamma}$.

On note P la partition standard de X en N_0l_0+1 sous-ensembles correspondant aux symboles $1,2,\dots,N_0l_0$ and 0 ci-dessus.

Si la connaissance de $P^{\ell}(x)$ à $\epsilon-\bar{d}$-près suffit à déterminer la tour d'ordre $n+1$ et le niveau contenant x dès que $\ell\ge l_n^{1+\beta}$, alors on obtiendra une majoration de la mesure des boules-$\bar{d}$ en $l_{n+1}^{-\gamma}$ pour $l_n^{1+\beta} \leq \ell \leq l_{n+1}^{1+\beta}$, d'où une majoration en $\ell^{-\gamma/(1+\beta)} \leq \ell^{-\Gamma}$ pour $\beta > 0$ assez petit.

Remarquons que l'entropie du système ainsi défini est nulle, vu $N_{n+1} = l_{n+1}^{\gamma-1}$: le nombre de blocs croˆpolynômialement avec la longueur.

Les nombres $a_n^i(k)$ seront choisis de manière à ce que:

(C1) tous les $n+1$-blocs soient de même longueur, $l_{n+1} = |b_{n+1}^i|$, pour tout i;
(C2) les 0 intercalés à l'ordre $n+1$ représentent au plus $1/n^2$ de cette longueur.

On obtient $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un automorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue.

Remarquons que la structure choisie implique que cet automorphisme est lâchement Bernoulli, car en effaçant les "0" intercalaires d'ordre n, (une modification inférieure à $n^{-2} \to 0$ pour la distance $\bar{f}$), on voit que tous les types de $n+1$-blocs se confondent, ce qui implique la propriété L.B. d'après [17].

Notation. $(B_n^i)_a^b$ est le mot fini sur P extrait du développement b_n^i à partir de la position a (incluse) et jusqu'à la position b (exclue).

5.1. **Choix des intercalaires.** Rappelons que $\gamma > \max(\Gamma, 1)$ et que $\beta > 0$ est petit.

(5.5) Affirmation. *On peut choisir les longueurs intercalaires $\{a_n^i(k)\}_{nik}$ de sorte qu'il y ait beaucoup de blocs, i.e.:*

$$N_n \stackrel{\text{def}}{=} {l_n}^{\gamma-1}$$

et qu'il existe $\epsilon_* > 0$ avec la propriété suivante:

Pour tous $n, m \geq n_0$, si $\bar{d}((B_n^i)|_a^b, (B_m^j)|_c^d) < \epsilon_*$ et $b - a = d - c \geq l'_n$ avec:

$$l'_n \stackrel{\text{def}}{=} l_{n-1}^{1+\beta}$$

$(l'_{n_0} = 1)$, alors $(B_m^j)_{c-a}^{c-a+l_n}$ est une occurrence explicite du bloc B_n^i.

(5.6) *Remarque.* Définissons formellement la notion d'**occurrence explicite**. On procède par induction sur $m - n$. On dit que $(B_m^j)_a^b$ est une occurrence explicite de B_n^i si:

(1) $n = m$ et $[a, b[= [0, l_m[$.
(2) $n = m - 1$, $a = |b_n^1 0^{a_n^j(1)} \dots b_n^{i-1} 0^{a_n^j(i-1)}|$ et $b = a + l_n$.
(3) $0 \leq n < m - 1$ et il existe des entiers c, d, k tels que $c \leq a < b \leq d$ et $(B_m^j)_c^d$ est une occurrence explicite de B_{m-1}^k et $(B_{m-1}^k)_{a-c}^{b-c}$ est une occurrence explicite de B_n^i.

□

On va disposer les "$0''$ intercalaires de façon à ce que:

(C3) la connaissance d'un nombre réduit de coïncidences permette de lire le type du n-bloc que l'on regarde ainsi que sa position exacte.

Remarquons que pour $n = n_0$ l'affirmation est satisfaite avec $\epsilon_* = 1$. Supposons fixées les longueurs intercalaires $a_m^i(k)$ d'ordre $m < n$ de sorte qu'il existe $\epsilon_n > 0$ valable au rang n. On cherche des longueurs intercalaires $\{a_n^i(k)\}_{ik}$ et un ϵ_{n+1} valable au rang $n+1$ qui ne soit pas trop petit, i.e., avec $\sum_n \log \epsilon_n / \epsilon_{n+1} < \infty$ (de sorte qu'on puisse poser $\epsilon_* = \inf_n \epsilon_n > 0$).

1. La connaissance d'un extrait d'un $n+1$-bloc de longueur l'_{n+1} doit déterminer le type et la position de ce $n+1$-bloc. On découpe donc B^i_{n+1} en **sous-blocs de base** comprenant h_n n-blocs consécutifs avec:

$$h_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n^2}\frac{l'_{n+1}}{l_n} = \frac{1}{n^2}\cdot l_n^\beta$$

Tout extrait de longueur au moins l'_{n+1} contient au moins n^2 sous-blocs de base.

Fixons $u = (B^i_{n+1})^b_a$ et $v = (B^j_m)^d_c$ séparés par:

$$\bar{d}(u,v) < \epsilon_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (1-3n^{-2})^3\epsilon_n.$$

Découpons u suivant les limites des sous-blocs de base de B^i_{n+1}. Notons $u = u_1 \dots u_r$ le découpage obtenu. Soit $v = v_1 \dots v_r$ le découpage correspondant de v (i.e., $|v_s| = |u_s|$ et on dit que v_s est le **vis-à-vis** de u_s). u_1 et u_r sont peut-être des sous-blocs de base incomplets. Comme $r \geq n^2$,

$$\bar{d}(u,v) \geq (1-2n^{-2})\frac{1}{r-2}\sum_{s=2}^{r-1}\bar{d}(u_s,v_s)$$

on peut trouver au moins un $s = 2,\dots,r-1$ tel que $\bar{d}(u_s,v_s) < (1-3n^{-2})^2\epsilon_n$.

2. On veut que chaque sous-bloc de base (et donc u_s) comporte toute l'information. C'est pourquoi on prend $a^i_n(\cdot)$ h_n-périodique. Pour caractériser le $i$ème type de $n+1$-bloc, on se donnera ci-dessous une fonction f^i_n. On code cette fonction par la longueur des intervalles intercalaires en posant:

$$a^i_n(k+qh_n) = f^i_n(\lceil k/n^2\rceil) \in \{1,\dots,l_n^\beta\} \qquad \text{pour } k=1,\dots,h_n-1,\ q\geq 0 \tag{5.7}$$

et $a^i_n(qh_n) = h_n l_n^\beta - \sum_{k=1}^{h_n-1} a^i_n(k)$ pour $q \geq 1$, pour avoir l'uniformité des longueurs des $n+1$-blocs. $\lceil x\rceil$ est le plus petit entier $\geq x$. On code donc n^2 fois chaque valeur de f^i_n dans chaque sous-bloc de base. On appelle chacune de ces suites de n^2 n-blocs ayant les mêmes intervalles intercalaires d'ordre n un **segment répétitif**.

Evaluons N_n et l_n. Vu $\sum_{k=1}^{h_n} a^i_n(k) = h_n l_n^\beta$, $l_{n+1} = N_n l_n(1+l_n^{-(1-\beta)})$. Or $N_n = l_n^{\gamma-1}$ donc $l_{n+1} = l_n^\gamma(1+l_n^{-(1-\beta)})$. On en déduit:

$$\log l_n = \text{const}\cdot\gamma^n(1+o(1))$$

avec const une constante positive.

D'après (5.7), u_s qui comprend h_n n-blocs se décompose en h_n/n^2 segments répétitifs. Il en existe au moins h_n/n^4 qui sont **δ-proches** de leurs vis-à-vis dans v: la distance-$\bar{d}$ entre les deux est majorée par: $\delta \stackrel{\text{def}}{=} (1-n^{-2})^{-1}\bar{d}(u_s,v_s) \leq (1-3n^{-2})\epsilon_n$.

3. Considérons un des h_n/n^4 segments répétitifs de u_s proches de leurs vis-à-vis. L'union (non contigüe) des n^2 n-blocs du segment (privés des intervalles intercalaires) représente une fraction au moins $(1+l_n^{-(1-\beta)})^{-1} \geq 1-n^{-2}$ de la longueur totale. La distance-$\bar{d}$ entre la restriction du segment à cette union et le vis-à-vis dans v est donc majorée par $(1-3n^{-2})/(1-n^{-2})\cdot\epsilon_n$.

Enfin, en divisant l'union des n^2 n-blocs en chacun de ces n-blocs, on trouve au moins deux n-blocs, disons B_n^s et B_n^r, qui sont ϵ_n-proches de leur vis-à-vis, vu $\frac{1-3n^{-2}}{(1-n^{-2})(1-2n^{-2})} < 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence les vis-à-vis de ces deux n-blocs de B_{n+1}^i sont des occurences explicites de n-blocs du même type dans B_m^j. Notons Δ le nombre de symboles apparaissant entre les développements de B_n^s et de B_n^r dans u.

On a: $\Delta = (r-s-1)l_n + (r-s)f_n^i(\lceil s/n^2\rceil)$ en regardant u. On a la même formule avec j en regardant v. D'où $f_n^i(\lceil s/n^2\rceil) = f_n^j(\lceil s/n^2\rceil)$. Les h_n/n^4 segments répétitifs δ-proches fournissent donc chacun une coïncidence distincte. Pour que ce soit suffisant pour reconnaître le $n+1$-bloc, on demande que les fonctions f_n^i satisfassent:

$$(*) \qquad i \neq j \implies \#\{1 \le k < h_n/n^2 : f_n^i(k) = f_n^j(k)\} < h_n/n^4.$$

On aura alors la propriété d'occurrence explicite annoncée.

5.2. **Existence des f_n^i.** On vérifie qu'on peut bien trouver une collection de N_{n+1} fonctions deux-à-deux séparées au sens de (*). Posons:

$$p = h_n/n^2 - 1, \quad b = l_n^\beta, \quad \delta = h_n/n^4.$$

On fixe $f_n^1 : \{1,\dots,p\} \to \{1,\dots,b\}$ arbitrairement. Puis, $f_n^1,\dots,f_n^i$ étant choisis, on veut pouvoir choisir f_n^{i+1} distincte de toutes les fonctions $f : \{1,\dots,p\} \to \{1,\dots,b\}$ telles que:

$$\#\{k : f(k) = f_n^j(k)\} \ge \delta$$

pour un $j = 1,\dots,i$.

Notons E le nombre maximal de fonctions ainsi exclues pour un j donné. On va montrer:

$$(N_{n+1}-1)E < b^p$$

i.e., après avoir choisi $i < N_{n+1}$ fonctions, l'ensemble des fonctions exclues est encore strictement plus petit que l'ensemble de toutes les fonctions: on peut donc continuer jusqu'à N_{n+1}.

En sommant sur le nombre q de coïncidences, $E = \sum_{q=\delta}^p C_p^q (b-1)^{p-q}$. Or:

$$\frac{C_p^{q+1}(b-1)^{p-q-1}}{C_p^q(b-1)^{p-q}} = \frac{p-q}{(q+1)(b-1)} < \frac{p}{\delta(b-1)}$$
$$= \frac{h_n/n^2-1}{(h_n/n^4)(l_n^\beta - 1)} \le \mathrm{const}\cdot\frac{n^2}{l_n^\beta} < 1,$$

vu l'estimation de l_n ci-dessus.

Le premier terme de la somme E majore donc les autres et on a:

$$E \le p\cdot C_p^\delta \cdot (b-1)^{p-\delta} \le p\cdot\sqrt{\delta}\left(\frac{ep}{\delta}\right)^\delta \cdot b^{p-\delta}$$

en utilisant la formule de Stirling: $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi/n}$ et donc: $C_p^\delta < p^\delta/\delta! < \sqrt{\delta}p^\delta/(\delta/e)^\delta = \sqrt{\delta}(ep/\delta)^\delta$. Finalement:

$$\frac{b^p}{E} \ge \frac{1}{p\sqrt{\delta}}\left(\frac{b\delta}{ep}\right)^\delta \ge \frac{1}{h_n^{3/2}}\left(\frac{l_n^\beta}{3n^2}\right)^{h_n/n^4} \ge \frac{1}{l_n^{\frac{3}{2}\beta}}\left(\frac{l_n^\beta}{3n^2}\right)^{l_n^\beta/n^6}$$
$$= \exp\left\{\beta\frac{l_n^\beta}{n^6}\log l_n + \dots\right\}$$

(les termes négligés dans l'accolade sont des $o(\cdot)$ du terme écrit). Or

$$N_{n+1} \leq 2N_n l_n = 2l_n^\gamma = \exp\{\gamma \log l_n + \dots\}.$$

On voit donc que $b^p/E >> N_{n+1}$.

5.3. **Majoration de $\mu(B_P(u,\epsilon))$.** Il reste à calculer la mesure des $\epsilon, \bar{d}$-boules pour $\epsilon > 0$ petit.

Considérons $B_P(u,\epsilon)$ avec u extrait d'un bloc d'ordre quelconque avec $|u| \geq l_{n_0}$. Soit n tel que $l_n \leq |u| < l_{n+1}$.

Premier cas: les symboles 0 occupent au moins 99/100e de u. Donc ils occupent au moins 9/10e de tout v avec $\bar{d}(u,v) < 9/100$ (et $|v| = |u|$).

Vu sa longueur, v ne peut contenir de $n+1$-bloc complet. v rencontre donc au plus un intervalle intercalaire d'ordre $\geq n+1$. Le reste de v est constitué de zéro, un ou deux intervalles. Chacun de ces intervalles est constitué par la concaténation de $n-1$-blocs chacun suivi de l'intervalle intercalaire d'ordre $n-1$ associé ainsi que d'intervalles intercalaires d'ordre n. En effet, on peut oublier les blocs ou intervalles incomplets, leur longueur (majorée par $\max(l_{n-1}, l_n^\beta)$) étant très petite devant l_n. La densité des 0 sur ces intervalles est donc majorée par:

$$\mu_{n-1}(0) + \frac{1}{l_{n-1}^{1-\beta}} + \frac{1}{l_n^{1-\beta}} < 1/100.$$

En effet $\mu_{n-1}(0)$, la fraction des B_{n-1}^i occupée par 0 est arbitrairement petite et l_{n-1}, l_n sont arbitrairement grands, car l_0 est grand.

L'intervalle intercalaire d'ordre $n+1$ doit donc rencontrer v sur une fraction x de sa longueur telle que $x + \frac{1}{100}(1-x) \geq \frac{9}{10}$. Donc $x \geq 89/99$. En particulier:

$$v_{11/99|v|} \dots v_{89/99|v|} = \underbrace{0 \dots 0}_{79/99|v|}.$$

On voit donc que $B_P(u, 9/100) \subset T^{-11/99|u|}([0^\ell]_P)$ avec $\ell \stackrel{\text{def}}{=} 79/99|u|$.

u correspond donc à un segment intercalaire dans un bloc d'ordre $\geq N$, avec N minimal tel que $l_N^\beta \geq \ell$:

$$\mu([0^\ell]_P) \leq \sum_{n \geq N} \frac{l_n^\beta}{l_n} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2^k l_N)^{1-\beta}} \leq \text{const} \cdot \frac{1}{|u|^{1/\beta - 1}} \leq \frac{1}{|u|^\gamma}$$

car $l_{n+1}/l_n \geq 2$ vu l'estimation sur l_n. La dernière inégalité a lieu dès que: $\beta < \frac{1}{\gamma+1}$. On a donc bien: $\mu(B_P(u,\epsilon)) \leq 1/|u|^\Gamma$ dans ce cas.

Deuxième cas: la densité des 0 est inférieure à 99/100. En particulier, la portion de u occupée par les un ou deux intervalles intercalaires d'ordre au moins $n+1$ rencontrant u est majorée par 99/100. Quitte à réduire la longueur de u par un facteur 100, on peut donc supposer que u ne rencontre pas de tel intervalle. u est donc inclus dans un $n+1$-bloc. Soit $\epsilon_* > 0$ fourni par l'affirmation (5.5).

Supposons d'abord que $|u| \geq l'_{n+1} = l_{n+1}^\beta$. Alors $B_P(u,\epsilon_*)$ est inclus dans un étage bien défini de la tour associée au $n+1$-bloc contenant u. Donc:

$$\mu(B_P(u,\epsilon_*)) \leq \frac{1}{l_{n+1}N_{n+1}} = \frac{1}{l_{n+1}^\gamma} \leq \frac{1}{|u|^\gamma} \leq \frac{1}{|u|^\Gamma}.$$

Supposons maintenant que $l_n/100 \leq |u| < l'_{n+1} = l_n^{1+\beta}$. On a:

$$B_P(u,\epsilon_*) \subset \bigcup_{k=1}^{r} T^{-d_k} B_P(u_k,\epsilon_*)$$

où $u = u_1 \dots u_r$ est la décomposition de u suivant les n-blocs et $d_k = |u_1 \dots u_{k-1}|$. On a $r \leq |u|/l_n + 2 \leq 2l_n^\beta$. Quitte à réduire u d'une fraction de sa longueur majorée par $\frac{2l'_n}{l_n/200} << 1$, on suppose que chaque u_k est de longueur au moins $l'_n = l_n^\beta$. $B_P(u_k,\epsilon_*)$ est donc inclus dans un étage bien défini de la tour correspondant à un n-bloc bien défini. Donc:

$$\mu(B_P(u,\epsilon_*)) \leq 2l_n^\beta \cdot \frac{1}{l_n N_n} = \frac{2}{l_n^{\gamma-\beta}} \leq \frac{\text{const}}{|u|^{(\gamma-\beta)/(1+\beta)}} < \frac{1}{|u|^\Gamma}$$

dès que $\beta > 0$ est assez petit pour que: $\frac{\gamma-\beta}{1+\beta} > \Gamma$.

References

[1] J. Buzzi, *Entropies et représentation markovienne des applications régulières sur l'intervalle*, Ph. D. Thesis, Université Paris-Sud, Orsay, 1995.

[2] ———, *Intrinsic ergodicity of smooth interval maps*, Israel J. Math. **100** (1997), 125–161.

[3] ———, *Markov extensions for multi-dimensional dynamical systems (soumis).*

[4] ———, *Principe variationnel et pistage pour certains systèmes discontinus (en pré-pa-ration).*

[5] J. Feldman, *Non-Bernoulli K-automorphisms and a problem of Kakutani*, Israel J. Math. **24** (1976), 16–38.

[6] S. Ferenczi, *Systèmes localement de rang un - Probabilités et Statistiques*, Ann. Inst. Henri Poincaré **20** (1984), 35–51.

[7] ———, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems*, Israel J. Math. **100** (1997), 189–207.

[8] ———, *Systems of finite rank*, Colloq. Math. **73** (1997), 35–65.

[9] M. Gerber, *A zero-entropy mixing transformation whose product with itself is loosely Bernoulli*, Israel J. Math. **38** (1981), 1–22.

[10] E. Gutkin, N. Haydn, *Generalized polytope exchanges*, Ergod. th. & dynam. syst. **17** (1997), 849–867.

[11] F. Hofbauer, *On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy*, Israel J. Math. I **34** (1979), 213–237; II **38** (1981), 107–115.

[12] J.L. King, *Joining rank and the structure of finite rank mixing transformations*, J. Analyse Math. **51** (1988), 182–227.

[13] S. Newhouse, *On some results of Hofbauer on maps of the interval*, Proceedings, Nagoya 1991.

[14] D.S. Ornstein, D.J. Rudolph, B. Weiss, *Equivalence of measure preserving transformations*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 262, 1982.

[15] D.S. Ornstein, B. Weiss, *Entropy and data compression schemes*, I.E.E.E. Trans. Inform. Theory **39** (1993), 78–83.

[16] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge University Press, 1983.

[17] A. Rothstein, *Versik processes: first steps.*, Israel J. Math. **36** (1980), 205–223.

[18] D.J. Rudolph, *Fundamentals of measurable dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

[19] P. Shields, J.-P. Thouvenot, *Entropy zero $\times$ Bernoulli processes are closed in the $\bar{d}$-metric*, Ann. Prob. **3** (1975), 732–736.